2026 早稲田（理工系）

[I]

(1) $t=2^x$ とおく

$$f(x)=t^3-\frac{15}{2}t^2+\frac{63}{4}t-\frac{57}{8}$$

$$\frac{df(x)}{dt}=3t^2-15t+\frac{63}{4}=0$$

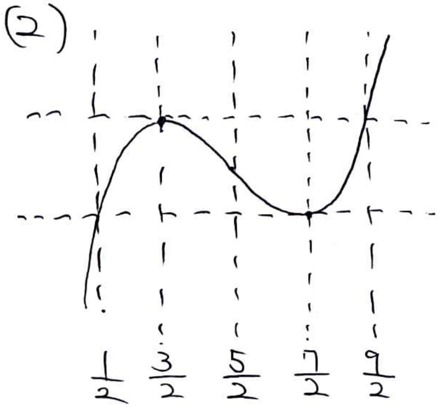
$$\Leftrightarrow t^2-5t+\frac{21}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t-\frac{3}{2}\right)\left(t-\frac{7}{2}\right)=0$$

$t=\frac{3}{2}$ のとき $M=3$

$t=\frac{7}{2}$ 〃 $m=-1$ //

(2)



$b-a$ が小さくなるようにとるには

$\frac{1}{2}\leqq t\leqq\frac{3}{2}$ または $\frac{3}{2}\leqq t\leqq\frac{7}{2}$

または $\frac{7}{2}\leqq t\leqq\frac{9}{2}$.

つまり

$-1\leqq x\leqq \log_2\frac{3}{2}$ または

$\log_2\frac{3}{2}\leqq x\leqq \log_2\frac{7}{2}$ または

$\log_2\frac{7}{2}\leqq x\leqq \log_2\frac{9}{2}$

順に $b-a$ は

$b-a=\log_2\frac{3}{2}-(-1)=\log_2 3$

$b-a=\log_2\frac{7}{2}-\log_2\frac{3}{2}=\log_2\frac{7}{3}$

$b-a=\log_2\frac{9}{2}-\log_2\frac{7}{2}=\log_2\frac{9}{7}$

最後のときが最小.

$b=\log_2\frac{9}{2}=2\log_2 3-1$

$a=\log_2\frac{7}{2}=\log_2 7-1$ //

[II]

(1) $\sqrt{m-\sqrt{n}}+\sqrt{m+\sqrt{n}}=\frac{1}{k}\sqrt{mn}$

⇓ 2乗

$2m+2\sqrt{m^2-n}=\frac{1}{k^2}mn$

$2\sqrt{m^2-n}=\frac{mn}{k^2}-2m$

$2k^2\sqrt{m^2-n}=m(n-2k^2)\geqq 0$

2乗 ↓ $\therefore n\geqq 2k^2$

$4k^4(m^2-n)=m^2(n-2k^2)^2$

$\{(2k^2)^2-(n-2k^2)^2\}m^2=4k^4n$

$$m^2=\frac{4k^4n}{n(4k^2-n)}=\frac{4k^4}{4k^2-n}\geqq 0$$

$\therefore n\leqq 4k^2$

$\therefore 2k^2\leqq n\leqq 4k^2 \cdots ①$

(2) $n=4k^2-1$, $m=2k$ は

自然数解. また①より

$4k^2-n\leqq 2k^2$

$0<\sqrt{4k^2-n}\leqq\sqrt{2}k$

より 平方数 $4k^2-n$ は $[\sqrt{2}k]$ 未満.

つまり n の解も $[\sqrt{2}k]$ より小さい.

(3) $k=3$ のとき

$$m^2=\frac{4\cdot 3^4}{36-n}$$

$(m,n)=(18,35),(9,32),(6,27)$ //

[III] (1)

平面ABP : $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$

とすると

$$\begin{cases}\gamma+\delta=0\\ \alpha+\beta+\delta=0\\ \alpha a+\delta=0\end{cases}$$

$\delta=\alpha a$, $\gamma=\alpha a$, $\beta=(a-1)\alpha$

$\alpha\neq 0$ より

$x+(a-1)y+az-a=0$

また

$(l\text{の方向ベクトル})=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

l : $\begin{cases}x=0\\ y=2-t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=t\end{cases}$

平面ABPと連立して

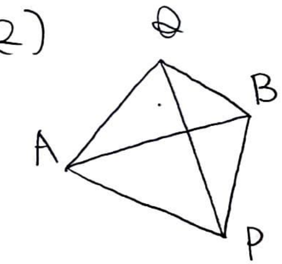
$(a-1)(2-t)+at-a=0$

$2a-2+t-a=0$

$\therefore t=2-a$

$Q(0,a,2-a)$ //

(2)



$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-a\\a\\2-a\end{pmatrix}$

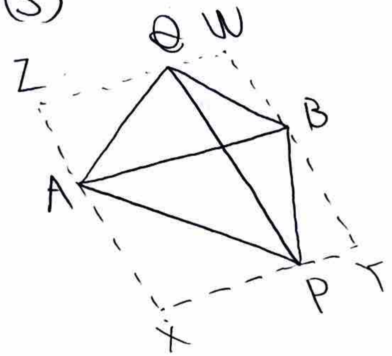
直線AB : $\begin{cases}x=s\\ y=s\\ z=1-s\end{cases}$

直線PQ : $\begin{cases}x=a-au\\ y=au\\ z=(2-a)u\end{cases}$

$\hookrightarrow \begin{cases}s=a-au \to 0<s=\frac{a}{2}<1\\ s=au\\ 1-s=(2-a)u \to 1=2u \therefore u=\frac{1}{2}\end{cases}$

$\therefore 0 < a < 2$

(3)



(四角形ABPQ)

$= (\text{平行四辺形} XYWZ) \times \frac{1}{2}$

$= \sqrt{|\vec{AB}|^2|\vec{PQ}|^2 - (\vec{AB}\cdot\vec{PQ})^2}$

$= \sqrt{2(a^2-a+1)}$

[IV]

(1) $a(2)=7$ $a(3)=8$
$a(4)=22$ $a(5)=23$
$a(6)=25$ $a(7)=26$
$a(8)=67$ $a(9)=68$

(2)

$a(2^n+1) = \sum_{k=0}^{n} b_k 3^k$

$= b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0 (3)$

$$\begin{array}{l} 3\,\underline{)\,a(2^n+1)} \\ 3\,\underline{)\,a(2^{n-1})} \cdots 2 \\ 3\,\underline{)\,a(2^{n-2})} \cdots 1 \\ \quad a(2^{n-3}) \cdots 1 \\ \quad \vdots \\ 3\,\underline{)\,a(2)} \cdots 1 \\ \quad 2 \cdots 1 \end{array}$$

$\therefore b_0 = b_n = 2,\ b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1} = 1$

(3)

$3\,\underline{)\,7}$
$\ \ 2 \cdots 1$

$3\,\underline{)\,22}$
$3\,\underline{)\,7} \cdots 1$
$\ \ 2 \cdots 1$

$3\,\underline{)\,67}$
$3\,\underline{)\,22} \cdots 1$
$3\,\underline{)\,7} \cdots 1$
$\ \ 2 \cdots 1$

$a(1) = 2 = 2(3)$
$a(2) = 7 = 21(3)$
$a(3) = 8 = 22(3)$
$a(4) = 22 = 211(3)$
$a(5) = 23 = 212(3)$
$a(6) = 25 = 221(3)$
$a(7) = 26 = 222(3)$
$a(8) = 67 = 2111(3)$
$a(9) = 68 = 2112(3)$
$\vdots$
$a(15) = 2222(3)$

$a(2^n-1) = \underbrace{22\cdots22}_{n\text{コ}}(3)$

$\sum_{k=1}^{2^n-1} a(k)$

$= \sum_{m=0}^{n-1} \{a(2^m) + \cdots + a(2^{m+1}-1)\}$

$= \sum_{m=0}^{n-1} \{2\cdot 3^m \times (2^{m+1}-2^m)$

$+ \frac{3}{2}\cdot 3^{m-1} \times (2^{m+1}-2^m) + \cdots$

$+ \frac{3}{2}(2^{m+1}-2^m)\}$

$= \sum_{m=0}^{n-1} \left(2\cdot 6^m + \frac{3}{2}\cdot 2^m \cdot \frac{1-3^m}{1-3}\right)$

$= \sum_{m=0}^{n-1} \left(2\cdot 6^m + \frac{3}{4}(6^m - 2^m)\right)$

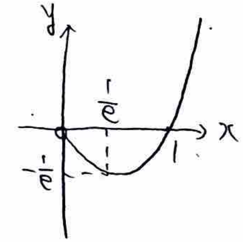
$= \cdots$

$= \frac{11\cdot 6^n - 15\cdot 2^n + 4}{20}$

[V]

(1) $f'(x) = 1 + \log x$

x	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$



(2)

$f(x)$ の $(s, f(s))$ での接線は

$y = (1+\log s)(x-s) + s\log s$

$= (1+\log s)x - s$

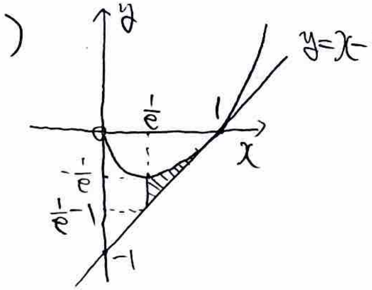
つまり $(1,0)$ での接線が $y = x-1$.

よって $a<1$ のとき なし

$a=1$: 1コ

$a>2$: 2コ

(3)



求める体積は

$1\cdot 1\cdot \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^3\right)$

$- \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{e}-1\right)$

$- \int_{-\frac{1}{e}}^{0} x^2 \pi\, dy$

$= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{e^3-1}{e^3} - \frac{\pi}{e^3} + \frac{\pi}{e^2}$

$- \pi\int_{\frac{1}{e}}^{1} x^2(1+\log x)\, dx$

$= \frac{\pi}{e^3}\left(\frac{e^3-1}{3} - 1\right) + \frac{\pi}{e^2}$

$- \pi\left\{\left[\frac{x^3}{3}(1+\log x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{x^2}{3} dx\right\}$

$= \cdots$

$= \pi\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{e^2} + \frac{14}{9e^3}\right)$