2024 東大（理科）

第1問

$A(0,-1,1)$

O　　　$P(x,y,0)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\angle AOP$

$-y=\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\cos\angle AOP$

$\leqq -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

これより $y>0$．2乗すると

$y^2\geqq\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow\ x^2-y^2\leqq 0$

$\Leftrightarrow\ y^2\geqq x^2$

$\therefore\ -y\leqq x\leqq y$

$(y>0)$ …①

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AP}|\cos\angle OAP$

$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y+1\\-1\end{pmatrix}=\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}\cos\angle OAP$

$y+2=\sqrt{2x^2+2y^2+4y+4}\cos\angle OAP$

$\geqq\sqrt{2x^2+2y^2+4y+4}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

これより $y\geqq -2$．2乗すると

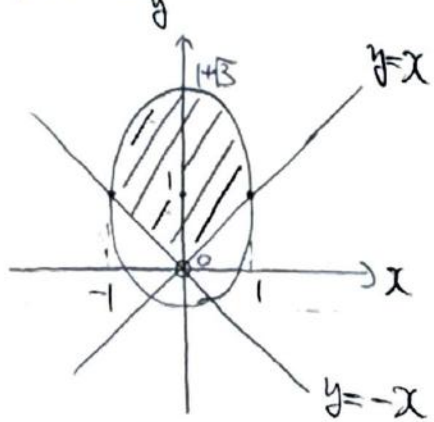
$y^2+4y+4\geqq\frac{3}{2}(x^2+y^2+2y+2)$

$0\geqq\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-y-1$

$x^2+\frac{1}{3}y^2-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}\leqq 0$

$x^2+\frac{1}{3}(y-1)^2\leqq 1$ …②

①，②より



領域は斜線部分．原点のみ境界は除く．

第2問

$f(x)$

$=\int_0^x\frac{x-t}{1+t^2}dt+\int_x^1\frac{t-x}{1+t^2}dt$

$=x\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt$

$+\int_x^1\frac{t}{1+t^2}dt-x\int_x^1\frac{1}{1+t^2}dt$

$f'(x)$

$=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}$

$-\frac{x}{1+x^2}-\left(\int_x^1\frac{1}{1+t^2}dt-\frac{x}{1+x^2}\right)$

$=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt-\int_x^1\frac{1}{1+t^2}dt$

$f'(\tan\alpha)$

$=\int_0^{\tan\alpha}\frac{1}{1+t^2}dt-\int_{\tan\alpha}^1\frac{1}{1+t^2}dt$

$=\left[\arctan t\right]_0^{\tan\alpha}-\left[\arctan t\right]_{\tan\alpha}^1$

$=\alpha-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=0$

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{8}$

(2)

$\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{8}}{\cos^2\frac{\pi}{8}}$

$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

$\therefore\ \tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$ //

(3) $f''(x)=\frac{1}{1+x^2}-\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{2}{1+x^2}>0$

$f'(x)$は単調増加．

x	0 … $\sqrt{2}-1$ … 1
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	↘ ↗

$f(0)$

$=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt$

$=\left[\frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$

$f(1)$

$=\int_0^1\frac{1-t}{1+t^2}dt$

$=\left[\arctan t\right]_0^1-\frac{1}{2}\log 2$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$

$f(1)-f(0)$

$=\frac{\pi}{4}-\log 2$

$>\frac{3}{4}-0.7>0.05>0$

これより 最大値 $f(1)$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$ //

最小値は

$f(\sqrt{2}-1)$

$= (\sqrt{2}-1)\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{1}{1+t^2}dt$

$-\int_0^{\sqrt{2}-1}\frac{t}{1+t^2}dt$

$+\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\frac{t}{1+t^2}dt$

$-(\sqrt{2}-1)\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt$

$= (\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\log(1+3-2\sqrt{2})$

$+\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log(4-2\sqrt{2})$

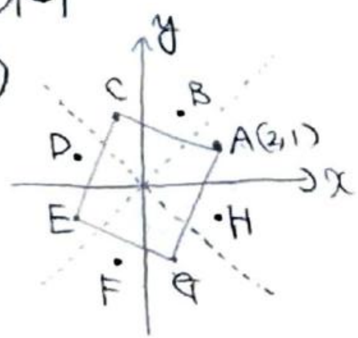
$-(\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{8}$

$= \log\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$

$= \log\frac{\sqrt{2}(4+2\sqrt{2})}{8} = \underline{\log\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ //

第3問

(1)



$(2,1),(1,2),(-1,2),(-2,1),$
$(-2,-1),(-1,-2),(1,-2),(2,-1)$

(2)

n秒後に上の座標にいる確率をそれぞれ
$a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n,$
$h_n,$ とする.

図のA, C, E, Gの点はすべてB, D, F, Hの点から移動する. 逆にB, D, F, Hの点もA, C, E, Gの点から移動する. つまりnが奇数のときB, D, F, Hに, nが偶数のときA, C, E, GのどこかにPは存在. よって$m\in N$で

$a_{2m-1}=e_{2m-1}=0$

また

$a_{2m}=\frac{1}{6}b_{2m-1}+\frac{1}{6}f_{2m-1}$
$\quad+\frac{1}{3}d_{2m-1}+\frac{1}{3}h_{2m-1}$
$=\frac{1}{6}(b_{2m-1}+d_{2m-1}+f_{2m-1}+h_{2m-1})$
$\quad+\frac{1}{6}d_{2m-1}+\frac{1}{6}h_{2m-1}$
$=\frac{1}{6}(1+d_{2m-1}+h_{2m-1})$

$e_{2m}=\frac{1}{6}b_{2m-1}+\frac{1}{6}f_{2m-1}$
$\quad+\frac{1}{3}d_{2m-1}+\frac{1}{3}h_{2m-1}$
$\quad=\frac{1}{6}(1+d_{2m-1}+h_{2m-1})=a_{2m}$

以上より $a_n=e_n\ (n\in N)$

(3)

$d_{2m-1}=\frac{1}{3}a_{2m-2}+\frac{1}{3}e_{2m-2}$
$\quad+\frac{1}{6}g_{2m-2}+\frac{1}{6}c_{2m-2}$
$\quad=\frac{1}{6}(1+a_{2m-2}+e_{2m-2})$

同様に
$h_{2m-1}=\frac{1}{6}(1+a_{2m-2}+e_{2m-2})$

$a_{2m}+e_{2m}$
$=\frac{1}{3}(1+d_{2m-1}+h_{2m-1})$
$=\frac{1}{3}\{1+\frac{1}{3}(1+a_{2m-2}+e_{2m-2})\}$
$=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}(a_{2m-2}+e_{2m-2})$
$\Leftrightarrow a_{2m}+e_{2m}-\frac{1}{2}$
$\quad=\frac{1}{9}(a_{2m-2}+e_{2m-2}-\frac{1}{2})$

∴

$a_{2m}+e_{2m}-\frac{1}{2}$
$\quad=(\underset{1}{a_0}+\underset{0}{e_0}-\frac{1}{2})\left(\frac{1}{9}\right)^m$
$\quad=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^m$

$\therefore a_{2m}+e_{2m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^m$

$a_n=e_n$より

$a_{2m}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^m$

以上より

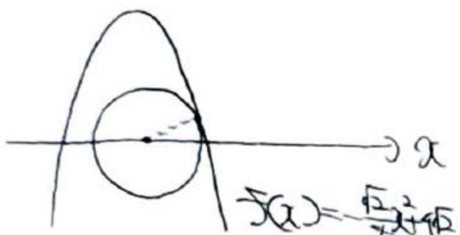
nが奇数のとき

$a_n=0$

nが偶数のとき

$a_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}$
$\quad=\underline{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ //

第4問



$f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 4\sqrt{2}$

$f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$

(共通接線の傾き) $= -\frac{\sqrt{2}}{2}t$

より

$\frac{f(t)}{t - c(t)} = \frac{\sqrt{2}}{t}$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{4}t^3 + 4\sqrt{2}t = \sqrt{2}(t - c(t))$

$\Leftrightarrow -\frac{t^3}{4} + 4t = t - c(t)$

$\therefore c(t) = \frac{t^3}{4} - 3t$

$\{r(t)\}^2$

$= (t - c(t))^2 + \{f(t)\}^2$

$= \left(4t - \frac{t^3}{4}\right)^2 + 2\left(4 - \frac{t^2}{4}\right)^2$

$= (t^2+2)\left(4 - \frac{t^2}{4}\right)^2$

$= \frac{1}{16}(t^2+2)(4+t)^2(4-t)^2$ //

(2)

$\{x - c(t)\}^2 + y^2 = \{r(t)\}^2$

↓ $(3, a)$

$\left(3 + 3t - \frac{t^3}{4}\right)^2 + a^2 = \{r(t)\}^2$

↓

a^2

$= \frac{1}{16}(t^2+2)(16-t^2)^2$

$- \frac{1}{16}(12 + 12t - t^3)^2$

$= \cdots$

$= \underbrace{-\frac{3}{8}t^4 + \frac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23}_{g(t)}$

$g'(t) = -\frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 6t - 18$

$= -\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3)$

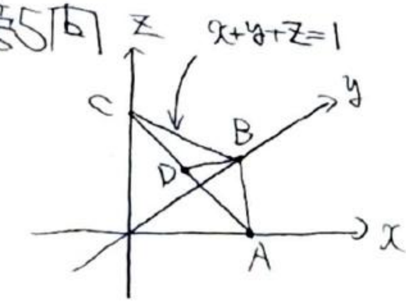
t	$0 \cdots 2 \cdots 3 \cdots 4$
$g'(t)$	$- \ 0 \ + \ 0 \ -$
$g(t)$	$23 \searrow 5 \nearrow \underset{\{f(3)\}^2}{\frac{49}{8}} \searrow -1$

$5 < a^2 < \frac{49}{8}$ つまり $\sqrt{5} < a < \frac{7\sqrt{2}}{4}$ で3コ

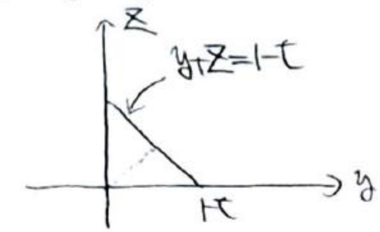
$a^2 = 5$ つまり $a = \sqrt{5}$ で 2コ

$0 < a < \sqrt{5}$ で 1コ //

第5問



① $x = t$ のとき $\left(\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$



断面はこの線分の通過領域より，断面積を $S(t)$ とすると

$S(t) = (1-t)^2\pi - \left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)^2\pi$

$= \frac{\pi}{2}(1-t)^2$

直線DBは，$D\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ より

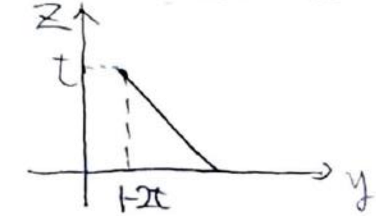
方向ベクトルが $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ から

$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}s \\ y = 1 + s \\ z = -\frac{1}{2}s \end{cases}$

ここで $x = t$ のとき $s = -2t$

$\begin{cases} y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$

② $x = t \ \left(0 \leqq t < \frac{1}{2}\right)$ のとき



つまり $1-2t$ と $\frac{1-t}{2}$ を比較して

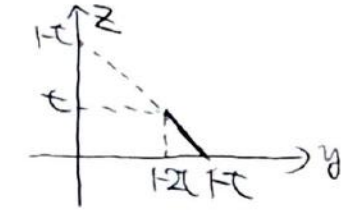
$1 - 2t - \frac{1-t}{2} < 0$

$\Leftrightarrow 2 - 4t - 1 + t < 0$

$\Leftrightarrow t > \frac{1}{3}$

なら①と $S(t)$ は等しい．

$0 < t \leqq \frac{1}{3}$ のとき



断面は上の線分の通過領域より

$S(t) = (1-t)^2\pi - \{t^2 + (1-2t)^2\}\pi$

$= \pi\{t^2 - 2t + 1 - (5t^2 - 4t + 1)\}$

$= \pi(-4t^2 + 2t)$

以上より求める体積は

$\int_0^{\frac{1}{3}} \pi(-4t^2 + 2t)\,dt$

$+ \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\pi}{2}(1-t)^2\,dt = \cdots = \frac{\pi}{9}$ //

第6問

(1)

$f(n)=n^3+10n^2+20n$

$=n(n^2+10n+20)$

$n=\pm1$ または $n^2+10n+20=\pm1$

この中で $n=-1$, $n^2+10n+20=1$ は不適.

$n^2+10n+20=-1$

$\Leftrightarrow n=-3,-7$

以上より $\underline{n=1,-3,-7}$ //

(2)

$g(n)=n(n^2+an+b)$

$n^2+an+b=\pm1 \cdots ☆$

を同時に満たす n の存在を考える. p, q を素数として

$$\begin{cases} p^2+ap+b=1 \\ q^2+a(-q)+b=-1 \end{cases}$$

とおき, 辺々引くと

$(p+q)(p-q)+a(p+q)=2$

$(p+q)(p-q+a)=2$

$p+q$ は2の約数だが p, q は素数なので矛盾.

つまり☆は同時に成立しない.

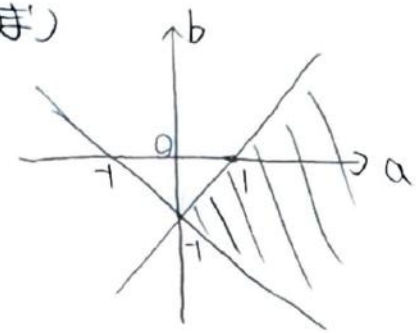
$g(1)$ が素数になる条件は

$1+a+b>0 \Leftrightarrow b>-a-1$

$g(-1)$ が素数になる条件は

$1-a+b<0 \Leftrightarrow b<a-1$

つまり



図の斜線部分以外は $g(n)$ が素数となる n が高々3つまで.

(i) $n=1,-1$, $n^2+an+b=1$ であるとき後者の2解を p_1, p_2 とおくと (p_1, p_2 は素数)

$p_1+p_2=-a>0$

$\Leftrightarrow a<0$

しかしこれは斜線部分と共通範囲なし.

(ii) $n=1,-1$, $n^2+an+b=-1$ のとき後者の2解を $-q_1, -q_2$ とすると (q_1, q_2 は素数)

$(-q_1)(-q_2)=q_1q_2=b+1$

$-q_1-q_2=-a$

$\Downarrow$

$b-a$

$=q_1q_2-1-q_1-q_2$

$=(q_1-1)(q_2-1)>0$

$\therefore b>a$

しかしこれは斜線部分と共通範囲なし.

以上より4つの可能性はなく, 3つ以下.