

定理の定義
 $n = k+1$ のとき

$$a_{k+1} = -7a_k - 3 + 3(\beta_{k+2})$$

$$a_m = \varphi P, b_m = \varphi \beta$$

$$(3a+2)^n = (3a+2)(Q(a) + Q_n a + b_n)$$

とく。

$$(1) \quad u = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\bar{u} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$(3u+2)^n = Q_n u + b_n$$

$$(3u+2)^{n+1} = Q_{n+1} u + b_{n+1}$$

$$= (Q_n u + b_n)(3u+2)$$

$$= 3Q_n u^2 \bar{u} +$$

$$+ (2a_n + 3b_n)u$$

$$(3u+2)$$

$$= Q_{n+1} \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + b_{n+1}$$

$$= -\frac{1}{2}Q_{n+1} + b_{n+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}Q_{n+1}i$$

$$(3u+2)$$

$$= 3a_n \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + (2a_n + 3b_n) \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + b_{n+1}$$

a_m, b_m が互いに素である
 $m (m \geq 2)$ が成立する。

$$(g \beta 2k+3) \text{ の整数}, P, Q \in \mathbb{Z}$$

$$a_{m-1} = \frac{2gP - 3g\beta}{7}$$

$$b_{m-1} = \frac{g(3P - 1)}{7}$$

$$b_{m-1} = \frac{3P - 9\beta}{7}$$

$$(1) \quad u = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\bar{u} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$(3u+2)^n = Q_n u + b_n$$

$$(3u+2)^{n+1} = Q_{n+1} u + b_{n+1}$$

$$= (Q_n u + b_n)(3u+2)$$

$$= 3Q_n u^2 \bar{u} +$$

$$+ (2a_n + 3b_n)u$$

$$(3u+2)$$

$$= Q_{n+1} \cdot \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + b_{n+1}$$

$$= -\frac{1}{2}Q_{n+1} + b_{n+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}Q_{n+1}i$$

$$(3u+2)$$

$$= 3a_n \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + (2a_n + 3b_n) \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + b_{n+1}$$

$$a_k = 7a_k + 3, b_k = 7\beta_k + 2$$

$$(3) \quad \frac{2a_{m+1}}{2a_m} = -2a_m + 6b_m$$

$$\frac{3b_{m+1}}{2a_m} = -9a_m + 6b_m$$

$$\therefore a_m = \frac{2}{7}a_{m+1} - \frac{3}{7}b_{m+1}$$

$$3a_{m+1} = -3a_m + 9b_m$$

$$\therefore b_{m+1} = -3a_m + 2b_m$$

$$3a_{m+1} - b_{m+1} = 7b_m$$

$$\therefore b_m = \frac{3}{7}a_{m+1} - \frac{1}{7}b_{m+1}$$

$$a_{m-1}, b_{m-1}$$
 が互いに素である。

$$a_m, b_m$$
 が互いに素である。

$$a_{m-1}, b_{m-1}$$
 が互いに素である。

$$a_m, b_m$$
 が互いに素である。

$$a_{m-1}, b_{m-1}$$
 が互いに素である。

[II]

(1)

$$P_1(k) \quad (k=0, 1)$$

$$= P_1(k) \cdot \frac{m-k+1}{m+2} + P_1(k), \frac{k}{m+2}$$

$$= \frac{1}{m+1} \left(\frac{m+1}{m+2} + \frac{k}{m+2} \right)$$

$$= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_2(0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P_2(1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P_2(2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{m+1}{m+2}$$

$$P_2(3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+2}{m+3}$$

$$\therefore P_2(k) = \frac{1}{2} \quad (k=0, 1, 2)$$

数学的帰納法で証明。
G) $P=1$ のとき成立
G) $P=m$ のとき成立 \Rightarrow $P=m+1$ のとき成立。

P_{m+1} のとき

$$Q_3(1) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b+1} \cdot \frac{b+1}{r+b+2}$$

$$y = e^{x-2} = f(x)$$

$$Q_3(k) = \frac{r \cdot b \cdot (b+1) \cdot (b+2) \cdots (b+12)}{(r+b) \cdot (r+b+1) \cdots (r+b+12)}$$

$$x = e^{y-2}$$

$$= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{m+1}(0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+1}{m+2}$$

$$P_{m+1}(1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{m+1}{m+2}$$

$$P_{m+1}(2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+2}{m+3}$$

$$P_{m+1}(3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+2}{m+3}$$

$$P_{m+1}(4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+3}{m+4}$$

$$P_{m+1}(5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+3}{m+4}$$

$$P_{m+1}(6)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+4}{m+5}$$

$$P_{m+1}(7)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+4}{m+5}$$

$$P_{m+1}(8)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+5}{m+6}$$

$$P_{m+1}(9)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+5}{m+6}$$

$$P_{m+1}(10)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+6}{m+7}$$

$$P_{m+1}(11)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+6}{m+7}$$

$$P_{m+1}(12)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+7}{m+8}$$

$$P_{m+1}(13)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+7}{m+8}$$

$$P_{m+1}(14)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+8}{m+9}$$

$$P_{m+1}(15)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+8}{m+9}$$

$$P_{m+1}(16)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+9}{m+10}$$

$$P_{m+1}(17)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+9}{m+10}$$

$$P_{m+1}(18)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+10}{m+11}$$

$$P_{m+1}(19)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+10}{m+11}$$

$$P_{m+1}(20)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+11}{m+12}$$

$$P_{m+1}(21)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+11}{m+12}$$

$$P_{m+1}(22)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+12}{m+13}$$

$$P_{m+1}(23)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+12}{m+13}$$

$$P_{m+1}(24)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+13}{m+14}$$

$$P_{m+1}(25)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+13}{m+14}$$

$$P_{m+1}(26)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+14}{m+15}$$

$$P_{m+1}(27)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+14}{m+15}$$

$$P_{m+1}(28)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+15}{m+16}$$

$$P_{m+1}(29)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+15}{m+16}$$

$$P_{m+1}(30)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+16}{m+17}$$

$$P_{m+1}(31)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+16}{m+17}$$

$$P_{m+1}(32)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+17}{m+18}$$

$$P_{m+1}(33)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+17}{m+18}$$

$$P_{m+1}(34)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+18}{m+19}$$

$$P_{m+1}(35)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+18}{m+19}$$

$$P_{m+1}(36)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+19}{m+20}$$

$$P_{m+1}(37)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+19}{m+20}$$

$$P_{m+1}(38)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+20}{m+21}$$

$$P_{m+1}(39)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+20}{m+21}$$

$$P_{m+1}(40)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+21}{m+22}$$

$$P_{m+1}(41)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+21}{m+22}$$

$$P_{m+1}(42)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+22}{m+23}$$

$$P_{m+1}(43)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+22}{m+23}$$

$$P_{m+1}(44)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+23}{m+24}$$

$$P_{m+1}(45)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+23}{m+24}$$

$$P_{m+1}(46)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+24}{m+25}$$

$$P_{m+1}(47)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+24}{m+25}$$

$$P_{m+1}(48)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+25}{m+26}$$

$$P_{m+1}(49)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+25}{m+26}$$

$$P_{m+1}(50)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+26}{m+27}$$

$$P_{m+1}(51)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+26}{m+27}$$

$$P_{m+1}(52)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+27}{m+28}$$

$$P_{m+1}(53)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+27}{m+28}$$

$$P_{m+1}(54)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+28}{m+29}$$

$$P_{m+1}(55)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+28}{m+29}$$

$$P_{m+1}(56)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+29}{m+30}$$

$$P_{m+1}(57)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+29}{m+30}$$

$$P_{m+1}(58)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+30}{m+31}$$

$$P_{m+1}(59)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+30}{m+31}$$

$$P_{m+1}(60)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+31}{m+32}$$

$$P_{m+1}(61)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+31}{m+32}$$

$$P_{m+1}(62)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+32}{m+33}$$

$$P_{m+1}(63)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+32}{m+33}$$

$$P_{m+1}(64)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+33}{m+34}$$

$$P_{m+1}(65)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+33}{m+34}$$

$$P_{m+1}(66)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+34}{m+35}$$

$$P_{m+1}(67)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+34}{m+35}$$

$$P_{m+1}(68)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+35}{m+36}$$

$$P_{m+1}(69)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+35}{m+36}$$

$$P_{m+1}(70)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+36}{m+37}$$

$$P_{m+1}(71)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+36}{m+37}$$

$$P_{m+1}(72)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+37}{m+38}$$

$$P_{m+1}(73)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+37}{m+38}$$

$$P_{m+1}(74)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+38}{m+39}$$

$$P_{m+1}(75)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+38}{m+39}$$

$$P_{m+1}(76)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+39}{m+40}$$

$$P_{m+1}(77)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+39}{m+40}$$

$$P_{m+1}(78)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+40}{m+41}$$

$$P_{m+1}(79)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+40}{m+41}$$

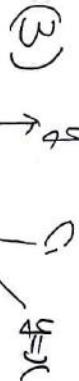
$$P_{m+1}(80)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m+41}{m+42}$$

$$P_{m+1}(81)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{m+41}{m+42}$$

$$P_{m+1}(82)$$



(2)

$$\alpha z = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}i)((-t) + \sqrt{3}i)$$

$$= \frac{1}{2}[3(-t) + 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}(-t) + 3]$$

$$= \frac{1}{2}[3 + (4t - 1)\sqrt{3}i]$$

(4)

複素面積は

$$2 \int_{\alpha}^{\beta} (z - e^{\alpha z}) dz$$

$$= (w - \alpha)(\bar{w} - \bar{\alpha})$$

$$= (\bar{w} - \bar{\alpha})(w - \alpha)$$

$$= \beta^2 - 2\beta - \alpha^2 + 2e^{\alpha z}$$

$$= \beta^2 - 2\beta - \alpha^2 + 2\alpha$$

$$= \left(\frac{9}{2\pi} - \frac{3\bar{\alpha}}{2} - \frac{3\alpha}{2} + \alpha\bar{\alpha} \right)$$

$$= \frac{9 - 3\bar{\alpha}\bar{z} - 3\alpha z}{2\bar{z}} + |\alpha|^2$$

複素面積は余弦部

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} + (\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{2}$$

[IV]

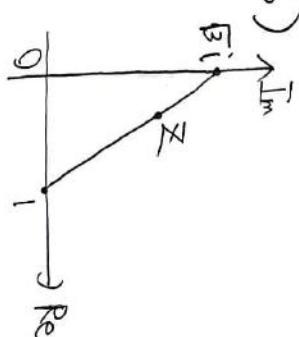
$$(1) z = 1 + t\sqrt{3}i \quad w = \frac{3}{4}$$

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \quad 0 + \sqrt{3}i$$

$$w = 3 \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{4}$$

$$z = \sqrt{3}i \quad 0 + \sqrt{3}i$$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}i}{4}$$

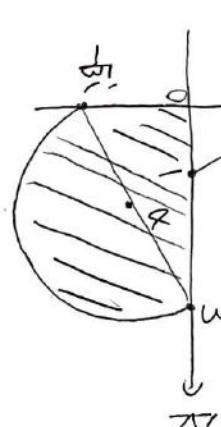


2. $z = (1-t) + t\sqrt{3}i \quad (0 \leq t \leq 1)$

$$(w - \alpha)(\bar{w} - \bar{\alpha})$$

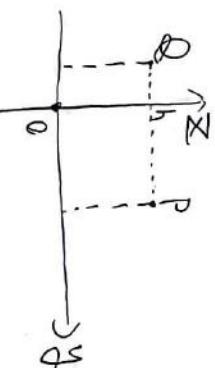
$$= |w - \alpha|^2 = 3$$

(5) w は α を中心とする $\sqrt{3}$ の円



[V]

$$(1) \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$



$$\cos \angle BAC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|}$$

$$= \frac{0}{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = 0$$

$$(\text{線分} PQ \text{の長さ}) = h$$

$h > \frac{3}{2}$ のとき

$$(\text{線分} PQ \text{の長さ}) = \infty$$

$$= \sqrt{(3+2h)^2 + h^2}$$

(2)

$$\text{直線} AB: \begin{cases} x = -2t \\ y = 3+2t \\ z = -2t \end{cases}$$

$$x = -2t = h \Leftrightarrow t = -\frac{h}{2}$$

以下同様

$$(\text{線分} PQ \text{の長さ})$$

$$= \sqrt{h^2 + (0 \leq h \leq \frac{3}{2})}$$

$$P(h, 3+h, h)$$

$$\text{直線} AC: \begin{cases} x = -2t \\ y = -3-4t \\ z = -2t \end{cases}$$

$$Q(h, -3+2h, h)$$

(4)

求めよ(4) 痛は

$$(3) \quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6+3h \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{直線} PQ: \begin{cases} x = h \\ y = 3+h+(6+3h) \\ z = h \end{cases}$$

$$h = h \text{ ただし } -3+2h \leq 0 \Leftrightarrow h \leq \frac{3}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} (h^2 + (0 \leq h \leq \frac{3}{2}))^2 dh$$

$$+ \int_0^{\frac{3}{2}} (2h^2 - 6h + 9 - h^2) dh$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} (2h^2 - 6h + 9 - 5h^2 + 12h - 9) dh$$