2021 東京大(理系)

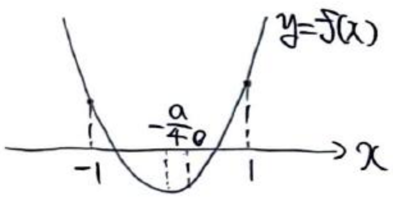
第1問

(1)

$x^2+ax+b=-x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+ax+b=0$

これが $-1<x<0$ と $0<x<1$ に解をもつ. 左辺を $f(x)$ とすると



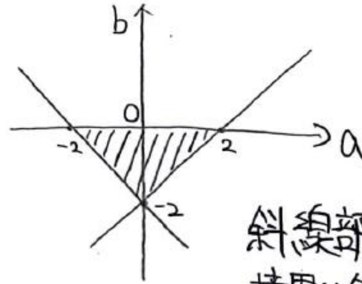
条件は

$$\begin{cases} f(-1)=2-a+b>0 \\ f(0)=b<0 \\ f(1)=2+a+b>0 \\ -1<-\frac{a}{4}<1 \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} b>a-2 \\ b<0 \\ b>-a-2 \\ -4<a<4 \end{cases}$$

求める範囲は



斜線部分. 境界は含まない.

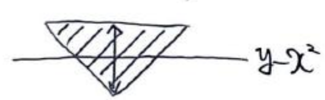
(2)

$y=x^2+ax+b$

$\Leftrightarrow b=-xa+y-x^2$

この直線が (b と a を変数としたとき) (1)の領域と交わるように x, y の関係式を求める.

(i) $x=0$ のとき



$-2<y-x^2<0$

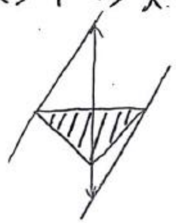
$\Leftrightarrow x^2-2<y<x^2$

(ii) $0<-x\leqq 1 \Leftrightarrow -1\leqq x<0$ のとき

$-2<y-x^2<-2x$

$\Leftrightarrow x^2-2<y<x^2-2x$

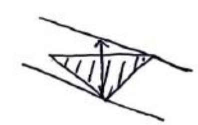
(iii) $-x>1 \Leftrightarrow x<-1$ のとき,



$2x<y-x^2<-2x$

$\Leftrightarrow x^2+2x<y<x^2-2x$

(iv) $-1\leqq -x<0 \Leftrightarrow 0<x\leqq 1$ のとき



$-2<y-x^2<2x$

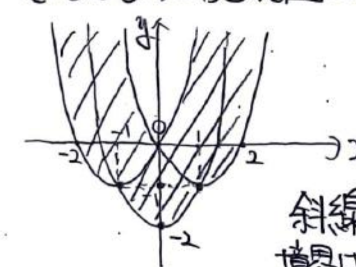
$\Leftrightarrow x^2-2<y<x^2+2x$

(v) $-x<-1 \Leftrightarrow x>1$ のとき

$-2x<y-x^2<2x$

$\Leftrightarrow x^2-2x<y<x^2+2x$

(i)〜(v)より求める範囲は



斜線部分. 境界は含まない.

第2問

(1)

$$\begin{cases} f(0)=c=\alpha \\ f(1)=a+b+c=\beta \\ f(i)=-a+bi+c=\gamma \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a+b=\beta-\alpha$

$+)\ -a+bi=\gamma-\alpha$

$(1+i)b=\beta+\gamma-2\alpha$

$\therefore b=\frac{1-i}{2}(\beta+\gamma-2\alpha)$ //

$a=\beta-\alpha-\frac{1-i}{2}(\beta+\gamma-2\alpha)$

$=\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\frac{i}{2}(\beta+\gamma-2\alpha)$

$=\frac{1+i}{2}\beta+\frac{-1+i}{2}\gamma-i\alpha$ //

(2)

$f(0)=\alpha, f(1)=\beta, f(i)=\gamma$

とすると

$f(2)$

$=4a+2b+c$

$=2(1+i)\beta+2(-1+i)\gamma-4i\alpha$

$\quad +(1-i)(\beta+\gamma-2\alpha)+\alpha$

$=-\alpha+3\beta-\gamma+(-2\alpha+\beta+\gamma)i$

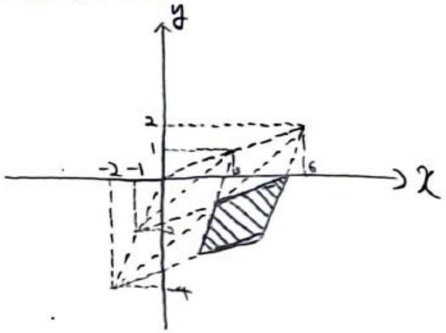
$$\begin{cases} x = -\alpha + 3\beta - \gamma \\ y = -2\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$ とおく.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで

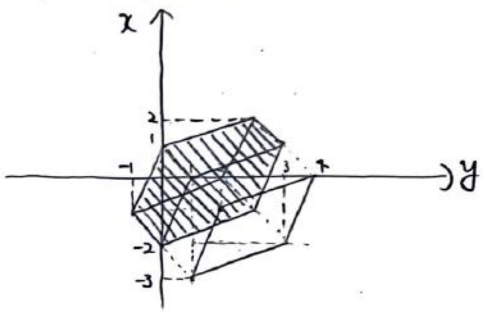
$$\alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \leqq \alpha \leqq 2 \\ 1 \leqq \beta \leqq 2 \end{pmatrix}$$

を図示すると



$1 \leqq \gamma \leqq 2$ であることを考え

求める範囲は



図の斜線部分.
境界を含む.

第3問

(1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$

$$f'(x) = \frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$$

$$g(x) = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= \frac{2}{16}(x-1) + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$$

Cとlを連立

$$\frac{x}{x^2+3} = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow 8x = (x+1)(x^2+3)$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^3 + x^2 - 5x + 3$$
$$\Leftrightarrow 0 = (x-1)(x^2+2x-3)$$
$$\Leftrightarrow 0 = (x-1)^2(x+3)$$

$x=1$ 以外の解は $\underline{x=-3}$ //

ただ1つ.

(2)

$$\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2 dx$$
$$= \int_{-3}^{1}\left(\frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\right)^2 dx$$
$$= \int_{-3}^{1}\left\{\left(\frac{x}{x^2+3}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{x(x+1)}{x^2+3} + \frac{1}{64}(x+1)^2\right\} dx$$

$$\int_{-3}^{1}\left(\frac{x}{x^2+3}\right)^2 dx \qquad \begin{aligned} x &= \sqrt{3}\tan\theta \\ dx &= \sqrt{3}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \end{aligned}$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\tan^2\theta}{\frac{9}{\cos^4\theta}}\sqrt{3}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta\, d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4}$$

$$\int_{-3}^{1}\frac{x(x+1)}{x^2+3}dx$$
$$= \int_{-3}^{1}\frac{x^2+3+x-3}{x^2+3}dx$$
$$= \int_{-3}^{1}\left(1 + \frac{x}{x^2+3} - \frac{3}{x^2+3}\right)dx$$
$$= \left[x + \frac{1}{2}\log(x^2+3)\right]_{-3}^{1}$$
$$\quad - 3\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$= 4 + \frac{1}{2}\log 4 - \frac{1}{2}\log 12$$
$$\quad - \sqrt{3}\left[\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= 4 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

以上より

$$\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2 dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(4 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)$$
$$\quad + \frac{1}{64}\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-3}^{1}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{8}\log 3 + \frac{\sqrt{3}}{8}\pi + \frac{1}{12}$$
$$= \underline{\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi + \frac{1}{8}\log 3 - \frac{7}{6}} \quad //$$

第4問

(1) KとLを4で割った余りをαとする.

$$\begin{cases} K = 4k + \alpha \\ L = 4l + \alpha \end{cases} \quad (k, l\text{は整数})$$

とすると

$$(4k+\alpha)A = (4l+\alpha)B$$
$$\Leftrightarrow 4(kA - lB) = \alpha(B-A)$$

αは $0 \leqq \alpha \leqq 3$ の整数より $B-A$ が4の倍数. つまりAを4で割った余りとBを4で割った余りは等しい.

(2)

$${}_{4a+1}C_{4b+1}$$

$$= \frac{(4a+1)4a(4a-1)\cdots(4a-4b+1)}{(4b+1)4b(4b-1)\cdots 2\cdot 1}$$

$$= \frac{4a(4a-4)\cdots(4a-4b+4)}{4b(4b-4)\cdots 4}$$

$$\times \frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdot\frac{4a-2}{4b-2}\cdots$$

$$\cdots\frac{(4a-4b+1)}{1}$$

$$= \frac{a(a-1)\cdots(a-b+1)}{b(b-1)\cdots 1}$$

$$\times \frac{4a+1}{4b+1}\cdot\frac{4a-1}{4b-1}\cdots\frac{4a-4b+1}{1}$$

$$= {}_aC_b \times \frac{4a+1}{4b+1}\times\frac{4a-1}{4b-1}\cdots\frac{4a-4b+1}{1}$$

ここで

$K=(4b+1)(4b-1)\cdots 1$

$L=(4a+1)(4a-1)\cdots(4a-4b+1)$

とおくと

$${}_{4a+1}C_{4b+1} = {}_aC_b \times \frac{L}{K}$$

$\therefore\ KA=LB$

K, Lは正の奇数となる.

(3)

$K=(4b+1)(4b-1)(2b-1)$
$(4b-3)(4b-5)(2b-3)$
$\cdots 5\times 3\times 1$

$L=(4a+1)(4a-1)(2a-1)$
$(4a-3)(4a-5)(2a-3)$
$\cdots(4a-4b+1)$

ここで $a\equiv b \pmod 2$ より

$2a\equiv 2b \pmod 4$

KとLの各項が先頭から, 4で割った余りがそれぞれ等しいので

$K\equiv L \pmod 4$

(1)より

$A\equiv B \pmod 4$

(4)

(3)より

${}_{2021}C_{37}\equiv {}_{505}C_{9} \pmod 4$

$\equiv {}_{126}C_{2} \pmod 4$

$\equiv 63\cdot 125 \pmod 4$

$\equiv 3\cdot 1 \pmod 4$

求める余りは3

第5問

(1)

$f(\theta)$

$=(\theta+\sin\theta+\alpha)^2+(\cos\theta+3)^2$

$=\theta^2+2\theta\sin\theta+2\alpha\sin\theta+2\alpha\theta+\alpha^2$
$+1+6\cos\theta+9$

$=\theta^2+2(\theta+\alpha)\sin\theta+2\alpha\theta+6\cos\theta$
$+\alpha^2+10$

$f'(\theta)$

$=2\theta+2\sin\theta+2(\theta+\alpha)\cos\theta$
$+2\alpha-6\sin\theta$

$=2\theta+2(\theta+\alpha)\cos\theta-4\sin\theta+2\alpha$

$f''(\theta)$

$=2+2\cos\theta+2(\theta+\alpha)(-\sin\theta)-4\cos\theta$

$=2\{-(\theta+\alpha)\sin\theta-\cos\theta+1\}$

$f'''(\theta)$

$=2(-\sin\theta-(\theta+\alpha)\cos\theta+\sin\theta)$

$=-2(\theta+\alpha)\cos\theta$

θ	$0\ \cdots\ \frac{\pi}{2}\ \cdots\ \pi$
$f'''(\theta)$	$-\quad 0\quad +$
$f''(\theta)$	$\searrow f''(\frac{\pi}{2}) \nearrow 4$

$f''(\frac{\pi}{2})=2\{-\frac{\pi}{2}-\alpha+1\}<0$

より $\frac{\pi}{2}<k<\pi$ で $f''(k)=0$

なるkが1つ存在. つまり

$0<x<k$ で $f''(\theta)<0$

$k<x<\pi$ で $f''(\theta)>0$

θ	$0\ \cdots\ k\ \cdots\ \pi$
$f''(\theta)$	$-\quad 0\quad +$
$f'(\theta)$	$4\alpha\ \searrow\ \nearrow 0$

増減表より $f'(k)<0$ より

$0<x<k$ で $f'(\theta)=0$ の解をただ1つもつ.

(2)

$f'(\frac{\pi}{2})=\pi-4+2\alpha$

もし $f'(\frac{\pi}{2})<0$ であれば

$f'(l)=0$, $0<l<\frac{\pi}{2}$

であるlが存在し, この点で

$f(\theta)$は最大．そうでなければ
$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ では $f(\theta)>0$
となり最大となる点をもたない．
求めるαの範囲は
$$\pi-4+2\alpha<0$$
$$\therefore\ \underline{0<\alpha<2-\frac{\pi}{2}}\ //$$

第6問

(1)
$$x^4+bx+c=x^4+(r-p^2+q)x^2+(pr-pq)x+qr$$
係数比較して
$$\begin{cases} r-p^2+q=0 \\ p(r-q)=b \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{array}{rl} & p(r+q)=p^3 \\ +) & p(r-q)=b \\ \hline & 2pr=p^3+b \end{array}$$
$$\therefore\ r=\frac{p^3+b}{2p}$$
$$q=p^2-r=\frac{2p^3-p^3-b}{2p}=\frac{p^3-b}{2p}\ //$$

(2)
$$c=qr$$
$$\Leftrightarrow -\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)=\frac{p^6-b^2}{4p^2}$$
$$\Leftrightarrow p^6+4p^2\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)-(a^2+1)^2(a+2)^2=0$$

一方
$$\{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}$$
$$=p^6+\{f(a)-a^2-1\}p^4+\{g(a)-f(a)(a^2+1)\}p^2-g(a)(a^2+1)$$
$$=0$$
比較して
$$g(a)\cdot(a^2+1)=(a^2+1)^2(a+2)^2$$
$$\therefore\ g(a)=(a^2+1)(a+2)^2$$
$$f(a)-a^2-1=0$$
$$\therefore\ f(a)=a^2+1$$
このとき
$$g(a)-f(a)(a^2+1)$$
$$=(a^2+1)(a+2)^2-(a^2+1)^2$$
$$=(a^2+1)(a^2+4a+4-a^2-1)$$
$$=(a^2+1)(4a+3)$$
$$=4\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$ となり適切．

つまり
$$\begin{cases} f(t)=t^2+1 \\ g(t)=(t^2+1)(t+2)^2 \end{cases}\ //$$
とすると条件をみたす．

(3) (2)の設定を使う．$p\neq 0$のとき
$$x^4+(a^2+1)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$
$$=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$$
$$=\left(x^2+px+\frac{p^3-b}{2p}\right)\left(x^2-px+\frac{p^3+b}{2p}\right)$$
ここで(2)より
$$p^4+f(a)p^2+g(a)$$
$$=p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2>0$$
より
$$p^2-(a^2+1)=0$$
$$\Leftrightarrow p^2=a^2+1$$
pが有理数になるのは $a=0$のとき．
$b=2$となるので有理数を係数とする
2次式に因数分解できる．

$p=0$のとき
$$x^4+bx+c=(x^2+q)(x^2+r)$$
となり $b=0$となり (3)の式にできない．

求めるaの値は $\underline{0}\ //$