2021 聖マリアンナ

$\boxed{1}$

(1) $f_n(a)$は公比$\underline{-a}$の和

$$f_n(a)=\underline{\frac{1-(-a)^n}{1+a}}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a)=\underline{\frac{1}{1+a}}$$

(2)

$\sqrt{n^2+2021}=m$ とおく.

$n^2+2021=m^2$

$\Leftrightarrow (m+n)(m-n)=2021$

$(m+n, m-n)=(2021, 1)$
$(47, 43)$

$n=\underline{1010}$ または $\underline{2}$

$\boxed{2}$

(1) $h(x)=g(x)-f(x)$

$$h'(x)=-1+2x+\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$=\underline{\frac{x^2(2x+3)}{(1+x)^2}}$$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ または $x=\underline{-\frac{3}{2}}$

$x>0$ で $h(x)>h(0)=\underline{0}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx$$
$$=\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\underline{\frac{5}{12}}$$

(2)

$k(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

$=-b^2(x-a)+b$

$=b(-bx+ab+1)$ $\quad ab \leftarrow \frac{1}{b}-1$

$=\underline{b(-bx+2-b)}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} b(-bx+2-b)dx$$
$$=b\left[-\frac{b}{2}x^2+(2-b)x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=b\left(-\frac{b}{8}+\frac{2-b}{2}\right)$$
$$=\underline{b\left(-\frac{5}{8}b+1\right)}$$

(3)

$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき $\underline{\frac{2}{3}}\leqq b\leqq\underline{1}$

$$=-\frac{5}{8}b^2+b$$

$b=\frac{4}{5}$のとき最大値 $\underline{\frac{2}{5}}$

$\boxed{3}$ $2+2a+b+c+d=10$

$750=90+160a+70b+80c+90d$

(1) $a=2$のとき

$70b+80c+90d=340$

$\Leftrightarrow 7b+8c+9d=34 \cdots ①$

また

$b+c+d=4$

$\Leftrightarrow 7b+7c+7d=28 \cdots ②$

①−②より

$c+2d=6 \quad \therefore d\leqq 3$

$\times 8 \quad 8b+8c+8d=32 \cdots ③$

①−③より

$-b+d=2$

$\Leftrightarrow d=2+b\geqq 2$

以上より $\underline{d=2, 3}$

(2)(3)

$$\overline{x^2}$$
$$=\frac{1}{10}(1600+2500+3600a+4900b+6400c+8100d+10000a)$$
$$=410+1360a+490b+640c+810d$$

(新)

$2a+b+c+d=8 \rightarrow a\leqq 4$

$16a+7b+8c+9d=66 \rightarrow a=4$はNG

$\hookrightarrow d=2+b\geqq 2$

$$\overline{x^2}$$
$$=2030+1360a+1300b+640c$$

$(a,b,c,d)=\underline{(3,0,0,2)}$

のとき $\overline{x^2}$つまり分散も最大.

$(a,b,c,d)=\underline{(0,0,6,2)}$

のとき $\overline{x^2}$つまり分散も最小.

$\boxed{4}$

(1)

XY

$= (x-m)(y-m)$

$= xy - mx - my + m^2$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m}$ $) \times mxy$

$my + mx = xy$

$= \underline{m^2}$ //

$m=3$のとき

$XY = 9$

X, Yの組は

$(\underset{x-3}{X}, \underset{y-3}{Y}) = (1,9), (3,3), (9,1)$

$(-1,-9), (-9,-1)$

$(X, Y \neq -3)$

$\therefore n(A_3) = \underline{5}$ //

(2)

$XY = m^2$

m^2の約数の個数が有限個でそれをn個とする。m^2が(より)大きい平方数なのでnは奇数である。

約数を小さい順に

$d_1, d_2, \cdots d_{\frac{n+1}{2}}, \cdots, d_n$

とする。$(d_{\frac{n+1}{2}} = m)$。

$(X, Y) = (\pm d_1, \pm d_n)$

$(\pm d_2, \pm d_{n-1})$

$\vdots$

$(d_{\frac{n+1}{2}}, d_{\frac{n+1}{2}})$

(X, Y)と(x, y)は1対1対応なので有限である。

(3) (2)より

$n(A_m) = 2n - 1$

となるので奇数となる。

(4)

$m^2 = p_1^{2e_1} p_2^{2e_2} p_3^{2e_3}$

より

$n = (2e_1+1)(2e_2+1)(2e_3+1)$

$\therefore$

$n(A_m)$

$= 2(2e_1+1)(2e_2+1)(2e_3+1) - 1$

$= \underline{16e_1e_2e_3 + 8(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) + 4(e_1+e_2+e_3) + 1}$ //