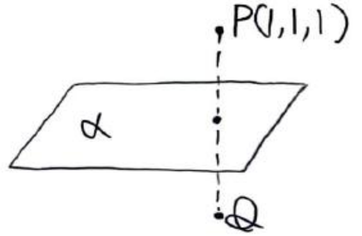
2021 京都大(理系)

$\boxed{1}$

問1

$\alpha: x+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$

$\Leftrightarrow 2x-2y+z-2=0$



直線PQ: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-2t \\ z=1+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

αと連立すると

$2(1+2t)-2(1-2t)+1+t-2=0$

$\Leftrightarrow 9t=1 \quad \therefore t=\dfrac{1}{9}$

Qは直線PQで$t=\dfrac{2}{9}$のとき

なので

$Q\left(\dfrac{13}{9}, \dfrac{5}{9}, \dfrac{11}{9}\right)$

問2

求める確率はn−1回目までで

白,青,黄が少なくとも1回記録される,

n回目は赤であるので

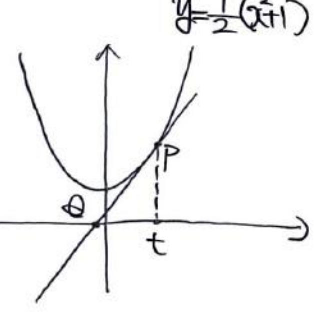
$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\dfrac{1}{4}-{}_3C_1\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\dfrac{1}{4}$ n−1回まで1色のみ記録

$-{}_3C_2\left\{\left(\dfrac{2}{4}\right)^{n-1}-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\dfrac{1}{4}$ n−1回まで2色のみ記録

$=\dfrac{3^{n-1}}{4^n}-\dfrac{3}{4^n}-3\left(\dfrac{2^{n-1}-2}{4^n}\right)$

$=\dfrac{3^{n-1}-3\cdot2^{n-1}+3}{4^n}$

$\boxed{2}$



$P\left(t, \dfrac{1}{2}(t^2+1)\right)$とおくと

この点での接線は

$y=t(x-t)+\dfrac{1}{2}(t^2+1)$

$=tx-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2} \quad (t\neq0)$

$y=0$のとき

$tx=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2t} \quad (t\neq0)$

$Q\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2t}, 0\right)$

L

$=\sqrt{\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2t}\right)^2+\dfrac{1}{4}(t^2+1)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4t^2}+\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{4}}$

$=\sqrt{\dfrac{t^4}{4}+\dfrac{3}{4}t^2+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4t^2}}$

$f(u)=\dfrac{1}{4}u^2+\dfrac{3}{4}u+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4u} \quad (u>0)$

とおくと

$f'(u)=\dfrac{u}{2}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4u^2}$

$=\dfrac{2u^3+3u^2-1}{4u^2}$

$=\dfrac{(u+1)(2u^2+u-1)}{4u^2}$

$=\dfrac{(u+1)^2(2u-1)}{4u^2}$

u	$0 \cdots \frac{1}{2} \cdots$
$f'(u)$	$- \; 0 \; +$
$f(u)$	$\searrow \quad \nearrow$

$u=\dfrac{1}{2}$のとき $f(u)$の最小値は

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1+6+12+8}{16}=\dfrac{27}{16}$

$t^2=u$とおけば

$L=\sqrt{f(u)}$

となるので, $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき

Lの最小値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{3}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6}+i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$

$=\left\{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}^n$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}\right)^n=a_n+b_n i$ とする.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6}-i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$

$=\left\{\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\right\}^n$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{4}\right)^n=a_n-b_n i$

以上より

$a_n=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}\right)^n+\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{4}\right)^n\right\}$

$\alpha = \frac{\sqrt{3}+i}{4}$ とおくと

$a_n = \frac{1}{2}\{\alpha^n + (\bar{\alpha})^n\}$

$S_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ とおく

$= \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2}\{\alpha^n + (\bar{\alpha})^n\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1-\alpha^{m+1}}{1-\alpha} + \frac{1-(\bar{\alpha})^{m+1}}{1-\bar{\alpha}}\right\}$

ここで

$\lim_{m\to\infty} \alpha^{m+1} = \lim_{m\to\infty} |\alpha|^{m+1}(\mathrm{Re}\,\alpha^{m+1} + \mathrm{Im}\,\alpha^{m+1})$

$= 0 \quad (\because 0<|\alpha|<1)$

同様に $\lim_{m\to\infty} (\bar{\alpha})^{m+1} = 0$.

以上より

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{6}$

$= \lim_{m\to\infty} S_m$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\bar{\alpha}}\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1-\bar{\alpha}+1-\alpha}{1-\alpha-\bar{\alpha}+\alpha\bar{\alpha}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{8-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

$= \frac{4-\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} \times \frac{5+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}$

$= \frac{14+3\sqrt{3}}{13}$ //

4

$y = \log(1+\cos x)$

$y' = \frac{-\sin x}{1+\cos x}$

求める長さを L とすると

L

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}\right)^2}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1+2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2}{1+\cos x}}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2}{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1}}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}}{1-\sin^2\frac{x}{2}}\, dx$ 　 $\sin\frac{x}{2} = t$, $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = dt$

$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2}{1-t^2}\, dt$

$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt$

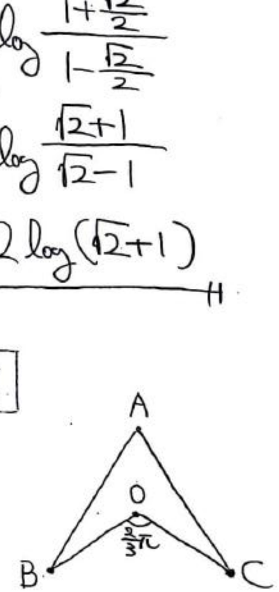
$= \left[-\log|1-t| + \log|1+t|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \log\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

$= 2\log(\sqrt{2}+1)$ //

5



(1)

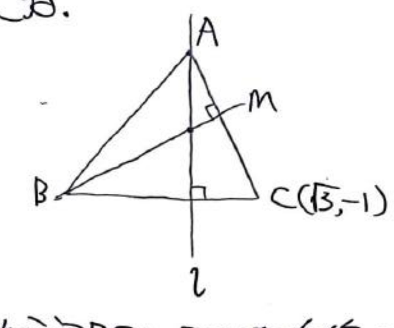
$\angle BOC = \frac{2}{3}\pi$

Aは $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ かつ y 座標は正なので円周角の定理より，原点Oを中心とした半径2の円の円周上で y 座標が正である点。

より $\triangle ABC$ の外心は原点 $(0,0)$ //

(2)

$A(2\cos\theta, 2\sin\theta)\ (0<\theta<\pi)$ とする.



Aから辺BCに下ろした垂線 l は

$x = 2\cos\theta$

直線ACは $\theta \neq \frac{\pi}{6}$ のとき

$y = \frac{2\sin\theta+1}{2\cos\theta-\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})-1$

Bから辺ACに下ろした垂線 m は

$y = \frac{\sqrt{3}-2\cos\theta}{2\sin\theta+1}(x+\sqrt{3})-1$

これは $\theta = \frac{\pi}{6}$ を含む.

垂心の y 座標は

$y = \frac{\sqrt{3}-2\cos\theta}{2\sin\theta+1}(2\cos\theta+\sqrt{3})-1$

$= \frac{3-4\cos^2\theta}{2\sin\theta+1} - 1$

$\Leftrightarrow y+1=\dfrac{3-4\cos^2\theta}{2\sin\theta+1}$

$y\neq -1$ $\left(\theta\neq\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right)$のとき

$2\sin\theta+1=\dfrac{3-4\cos^2\theta}{y+1}$

$\Leftrightarrow 2\sin\theta=\dfrac{3-x^2}{y+1}-1$

$4\sin^2\theta+4\cos^2\theta=4$ より

$\left(\dfrac{3-x^2}{y+1}-1\right)^2+x^2=4$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{3-x^2}{y+1}\right)^2-\dfrac{2(3-x^2)}{y+1}+x^2-3=0$

$\theta\neq\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi$ のとき $x\neq\pm\sqrt{3}$ より

$\dfrac{3-x^2}{(y+1)^2}-\dfrac{2}{y+1}-1=0$

$\Leftrightarrow 3-x^2-2(y+1)-(y+1)^2=0$

$\Leftrightarrow 3-x^2-2y-2-y^2-2y-1=0$

$\Leftrightarrow 0=x^2+y^2+4y$

ちなみに垂心のy座標が $y=-1$, $x=\pm\sqrt{3}$ のときも上の等式をみたす. 垂心のy座標は $0\leqq\theta\leqq\pi$ とすると

$y=\dfrac{3-4\cos^2\theta}{2\sin\theta+1}-1$

より $\theta=0,\pi$ のとき分母 $2\sin\theta+1$ が最小で分子 $3-4\cos^2\theta$ は最小なのでこのとき $y=-2$ で最小.

実際には $0<\theta<\pi$ より $y>-2$.

求める軌跡は

円 $x^2+y^2+4y=0$ $(y>-2)$ //

$\boxed{6}$

問1 対偶である

nが合成数 $\Rightarrow 3^n-2^n$が合成数

を示す.

nが合成数ならば2以上の自然数 p, qを用いて

$n=pq$

と表せる. このとき 3^n-2^nは

$3^{pq}-2^{pq}$

$=(3^p)^q-(2^p)^q$

$=(3^p-2^p)\{(3^p)^{q-1}+(3^p)^{q-2}\cdot 2^p+\cdots+3^p(2^p)^{q-2}+(2^p)^{q-1}\}$

このとき $3^p-2^p\geqq 5$

$(3^p)^{q-1}+(3^p)^{q-2}2^p+\cdots+3^p(2^p)^{q-2}+(2^p)^{q-1}$

$\geqq 2$

以上より 3^n-2^nは合成数.

問2.

$x=t$での接線は

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

となる. $x=y=0$を代入すると

$0=-tf'(t)+f(t)$

$\Leftrightarrow tf'(t)=f(t)\cdots *$

をみたすtの存在をいえばいい.

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ とおくと

$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$g(x)$に平均値の定理より

$\begin{cases}\dfrac{g(a)-g(1)}{a-1}=g'(c)\cdots ☆\\ 1<c<a\end{cases}$

なるcが存在.

☆は

$\dfrac{\frac{f(a)}{a}-f(1)}{a-1}=\dfrac{f(a)-af(1)}{a(a-1)}=0$

$=g'(c)$

つまり

$g'(c)=\dfrac{cf'(c)-f(c)}{c^2}=0$

$\therefore cf'(c)=f(c)$

つまり $t=c$ とすると $*$をみたす.