2021 慶應(薬)

[I]

(1)

$(1+i)^{10}$

$=\{(1+i)^2\}^5$

$=(2i)^5$

$=32i$

(2) 実数解を$\alpha, \alpha+1$とする.

$$\begin{cases} \alpha+\alpha+1=-a \\ \alpha(\alpha+1)=b \\ \dfrac{21+3a}{3}=\dfrac{13}{2} \Leftrightarrow \underline{a=-\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

↓

$2\alpha+1=\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha=-\frac{1}{4}$

$b=-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\underline{-\frac{3}{16}}$

(3) $P(X, Y)$とおく.

(i)

$AP:BP=3:4$

$\Leftrightarrow 4AP=3BP$

$\Leftrightarrow 16AP^2=9BP^2 \quad (AP>0, BP>0)$

$\Leftrightarrow 16X^2+16Y^2=9\{(X-7)^2+Y^2\}$

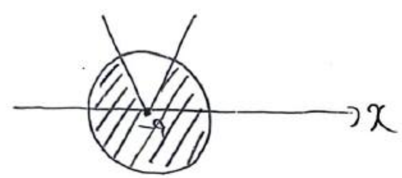
$\Leftrightarrow 7X^2+9\cdot14X+7Y^2=9\cdot49$

$\Leftrightarrow X^2+18X+Y^2-63=0$

$\therefore \underline{x^2+18x+y^2-63=0}$

(ii)

$(x+9)^2+y^2=144$



オ$=144\pi\times\frac{5}{6}=\underline{120\pi}$

(4)

$4\cos^2\frac{\theta}{2}+4\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$=2+2\cos\theta+2\sin\theta=1$

$\therefore \underline{\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \cos\theta=-\sin\theta-\frac{1}{2}$

より

$\sin^2\theta+\left(-\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\theta+\sin\theta-\frac{3}{4}=0$

$\Leftrightarrow 8\sin^2\theta+4\sin\theta-3=0$

$\Leftrightarrow \sin\theta=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{4}$

$\cos\theta=\frac{1\mp\sqrt{7}}{4}-\frac{1}{2}$

$=\frac{-1\mp\sqrt{7}}{4}$

$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$では$\cos\theta\geqq0$より

$\underline{\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}, \ \sin\theta=\frac{-1-\sqrt{7}}{4}}$

(5)

(i) $a_2=210210_{(3)}$

$=2\cdot3^5+1\cdot3^4+2\cdot3^2+3$

$=486+81+18+3$

$=\underline{588}$

(ii)

$a_n=\overbrace{210210\cdots210}^{3n桁}{}_{(3)}$

$=210000\cdots000_{(3)}$

$+\quad 210\cdots000_{(3)}$

$\vdots$

$+\quad 210_{(3)}$

$=210\times(1+1000+1000^2+\cdots+1000^{n-1})_{(3)}$

$=21\times(1+27+27^2+\cdots+27^{n-1})$

$=21\times\frac{1-27^n}{1-27}=\underline{\frac{21}{26}(3^{3n}-1)}$

(6)

(i)

$6x^2+(13y+7)x+(5y+2)(y+1)$

$=\{2x+(y+1)\}\{3x+(5y+2)\}$

$=\underline{(2x+y+1)(3x+5y+2)}$

(ii)

$\underbrace{(2x+y+1)}_{\geq 4}\underbrace{(3x+5y+2)}_{>10}=966$

$6\overline{)966}$ ... 161

$966=2\cdot3\cdot7\cdot23$

$(2x+y+1, 3x+5y+2)$

$=(6,161),(14,69),(21,46)$

$(7,138),(23,42)$

$\Leftrightarrow$

$(2x+y, 3x+5y)$

$=(5,159),(13,67),(20,44)$

$(6,136),(22,40)$

$\Leftrightarrow$

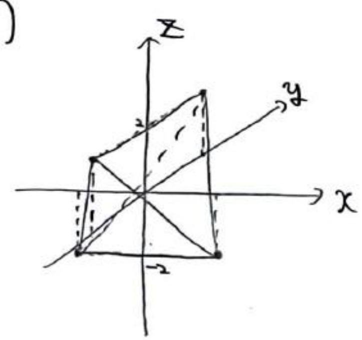
$(10x+5y, 3x+5y)$

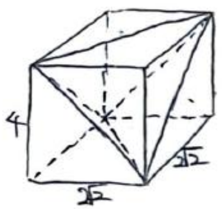
$=(25,159),(65,67),(100,44)$

$(30,136),(110,40)$

$\therefore (x,y)=(8,4),(10,2)$

(7)





四面体ABCDの体積は
図の直方体からコーナーを4つのぞくと求められる.

$32-\frac{16}{3}\times 4$

$=\frac{32}{3}$

[II]

(1)

(i)

$P(A_6)=\frac{6}{{}_6C_3}=\frac{3}{10}$

(ii)

$P(A_n)$

$=\frac{n}{{}_nC_3}=\frac{6}{(n-1)(n-2)}$

$\frac{6}{(n-1)(n-2)}\leqq\frac{1}{1070}$

$\Leftrightarrow 6420\leqq(n-1)(n-2)$

$\downarrow$

$n-2\geqq 80 \Leftrightarrow n\geqq 82$

最小のnは 82

(iii)

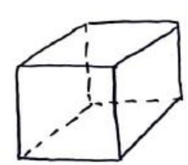
図のように1つ離れているとき.

$\frac{2n}{{}_nC_3-n}=\frac{2}{\frac{(n-1)(n-2)}{6}-1}$

$=\frac{12}{n^2-3n-4}$

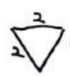
$=\frac{12}{(n-4)(n+1)}$

(2) ${}_8C_3=56$



 $\cdots 4\times 6=24$コ

 $\cdots 12\times 2=24$コ

 $\cdots 56-24-24$

$=8$コ

(平均値)

$=\frac{1}{56}(24\times 1+24\times\sqrt{2}+8\times\sqrt{3})$

$=\frac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{7}$

[III]

(1)

$y=(x^2+4x+4)a+x^3+4x^2+6x+2$

$\downarrow$

$x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$

aの値に関わらず $(x,y)=(-2,-2)$ を通る, これがP.

$f'(x)=3x^2+2(a+4)x+4a+6$

Pにおける接線は

$y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$

$=2(x+2)-2$

$=2x+2$

(2) $a=5$のとき

$f'(x)=3x^2+18x+24$

$=3(x+3)^2-3$

$x=-3$で接線の傾き最小.

(3) 必要条件

$f'(-3)=-2a+9=0 \quad a=\frac{9}{2}$

このとき

$f'(x)=3x^2+17x+24$

$=(x+3)(3x+8)$

$f'(x)$が$x=-3$で符号変化するので逆もみたす. $\therefore a=\frac{9}{2}$

Qは

$x^3+\frac{17}{2}x^2+24x+20=2x+2$

$\Leftrightarrow x^3+\frac{17}{2}x^2+22x+18=0$

$\Leftrightarrow (x+\frac{9}{2})(x+2)^2=0$

$Q(-\frac{9}{2},-7)$

また$S(-3,-\frac{5}{2})$, $P(-2,-2)$より

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\triangle SPQ$

$=\frac{1}{2}\left|(-\frac{5}{2})(-\frac{1}{2})-(-1)(-5)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|\frac{5}{4}-5\right|$

$=\frac{15}{8}$