2020 横浜市立大

(理, 医, データサイエンス)

[I]

(1) $x \neq 0$ より x^2 で割ると

$x^2-8x+17-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+15-8\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}-3\right)\left(x+\frac{1}{x}-5\right)=0$

x^2 かけると

$(x^2-3x+1)(x^2-5x+1)=0$

$\therefore \underline{x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}}$ //

(2) $\begin{cases} 3\vec{a}+2\vec{b}=\vec{p} \\ 2\vec{a}-3\vec{b}=\vec{q} \end{cases}$ とおく.

$\vec{a}, \vec{b}$ について解くと

$\begin{cases} \vec{a}=\frac{3}{13}\vec{p}+\frac{2}{13}\vec{q} \\ \vec{b}=\frac{2}{13}\vec{p}-\frac{3}{13}\vec{q} \end{cases}$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2$

$=\left|\frac{5}{13}\vec{p}-\frac{1}{13}\vec{q}\right|^2$

$=\frac{25}{169}-\frac{10}{169}\vec{p}\cdot\vec{q}+\frac{1}{169}$

$=\frac{2}{13}-\frac{10}{169}|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta$

($\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を θ とする)

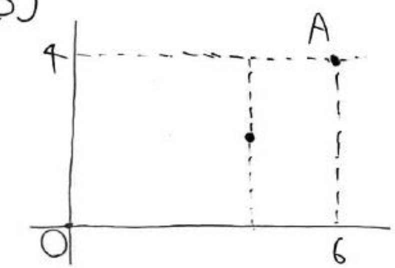
$=\frac{2}{13}-\frac{10}{169}\cos\theta$

$\theta=\pi$ のとき最大.

$\max|\vec{a}+\vec{b}|^2=\frac{26}{169}+\frac{10}{169}$

$\therefore \underline{\max|\vec{a}+\vec{b}|=\frac{6}{13}}$ //

(3)



普通の最短経路の問題

n(O→A ただし(4,2)通らない)

$=n(\mathrm{O}\to\mathrm{A})-n(\mathrm{O}\to(4,2)\to\mathrm{A})$

$={}_{10}C_4-{}_6C_2\cdot{}_4C_2$

$=210-90$

$=\underline{120\text{通り}}$ //

(4)

求める確率を P_n とする.

n回目 　 n+1回目

Aは0 　 q_n 　 q_{n+1}

Aは1 　 P_n 　 P_{n+1}

Aは2 　 $1-P_n-q_n$

$q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{3}{16}P_n$

$P_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{5}{8}P_n+\frac{1}{2}(1-P_n-q_n)$

$=\frac{1}{8}P_n+\frac{1}{2}$

↓

$P_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{1}{8}\left(P_n-\frac{4}{7}\right)$

↓

$P_n-\frac{4}{7}=\left(\underbrace{P_1}_{\frac{5}{8}}-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

$\therefore P_n=\frac{3}{56}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}$

$=\underline{\frac{3}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n+\frac{4}{7}}$ //

[II]

(1) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}^2=\underline{2}$ //

(2) $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると互いに素な自然数 p, q を用いて

$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$

と表せる. $\sqrt{2}p=q$ を2乗して

$2p^2=q^2$.

q^2 は偶数より q も偶数なので $q=2k\ (k\in\mathbb{N})$ とおくと

$2p^2=4k^2$

$\Leftrightarrow p^2=2k^2$.

p^2 は偶数より p も偶数であるが p と q が互いに素であることに反する. つまり $\sqrt{2}$ が有理数と仮定したことが誤り.

故に $\sqrt{2}$ は無理数である.

(3)

(i) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数と仮定すると

$(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

が求める無理数の組

である.

(ii) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数と仮定すると

(1) より

$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$

なので

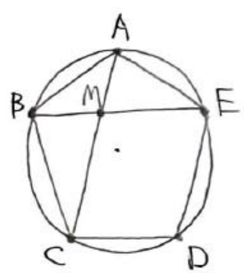
$(x, y) = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$

が求める無理数の組

である.

[III]

(1)



$\triangle ABE$ と $\triangle BCA$ は

合同な二等辺三角形.

$\angle BAE = \angle CBA = 108^\circ$

$\angle ABE = \angle AEB = \angle BCA = \angle BAC = 36^\circ$

これより

$\angle CBM = \angle CBA - \angle ABE = 72^\circ$

$\angle CMB = 180^\circ - \angle CBM - \angle BCA$

$= 72^\circ$

以上より $\triangle BCM$ は二等辺三角形なので

$BC = MC$

(2) $\angle AMB = 180^\circ - \angle CMB = 108^\circ$

$\angle ABM = \angle BAM = 36^\circ$

より $\triangle ABC \sim \triangle BMA$.

$AB = a,\ AC = ga$ とすると

$AC : BA = BC : MA$

$\Leftrightarrow ga : a = a : ga - a$

$\Leftrightarrow ga(ga - a) = a^2$

$\Leftrightarrow g(g-1) = 1 \quad (a > 0)$

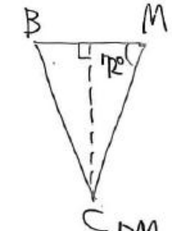
$\Leftrightarrow g^2 - g - 1 = 0$

$\therefore g = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because g > 0)$

$\therefore \dfrac{AC}{AB} = g$

$= \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ //

(3)



$\cos 72^\circ = \dfrac{\frac{BM}{2}}{a}$

$= \dfrac{ga - a}{2a}$

$= \dfrac{g-1}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\cos \dfrac{3\pi}{5} = \cos 108^\circ$

$= -\cos 72^\circ$

$= \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ //

(4) $\triangle ABC$ に正弦定理より

$\dfrac{AC}{\sin 108^\circ} = 2OA$

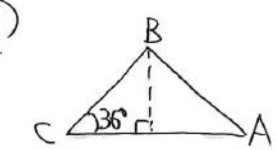
$\therefore \dfrac{AC}{OA} = 2\sin 108^\circ$

$= 2\sqrt{1 - \cos^2 108^\circ}$

$= 2\sqrt{\dfrac{16 - (1-\sqrt{5})^2}{16}}$

$= \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$ //

(5)



$\cos \dfrac{\pi}{5}$

$= \cos 36^\circ$

$= \dfrac{\frac{1}{2} \cdot CA}{BC}$

$= \dfrac{ga}{2a}$

$= \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ //

[IV]

(1)

$$\left(\frac{\cos x}{\sin^n x}\right)'$$

$$= \frac{-\sin^{n+1}x - \cos x\,(n\sin^{n-1}x)\cos x}{\sin^{2n}x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x - n\cdot\cos^2 x}{\sin^{n+1}x}$$

(2)

$\cos x = t$ とおくと

$-\sin x\,dx = dt$

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

$$= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{-1}{1-t^2}dt$$

$$= \int \frac{1}{t^2-1}dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\frac{1}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log|t-1| - \log|t+1|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C$$

ただしCは積分定数.

(3)

$$\int \frac{\cos x}{\sin^n x}dx$$

$$= \frac{1}{-n+1}\sin^{-n+1}x + C$$

より)

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx$$

$$= \int \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin^n x}dx$$

$$= \cos x \cdot \frac{1}{(1-n)\sin^{n-1}x}$$

$$- \int (-\sin x)\frac{1}{(1-n)\sin^{n-1}x}dx$$

$$= \frac{1}{1-n}\left(\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \int \frac{1}{\sin^{n-2}x}dx\right)$$

(4)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx$$

$$= \left[\frac{1}{-2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{-2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\log(\sqrt{2}-1)^2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}-1)$$

//

[V]

(1)

X_i	50	100
$P(X_i)$	$1-P$	P

(2)

$E(X_i)$

$= 50(1-P)+100P$

$= \underline{50P+50}$ //

$V(X_i)$

$= E(X_i^2)-(E(X_i))^2$

$= 2500(1-P)+10000P$
$\quad -(50(P+1))^2$

$= 7500P+2500$
$\quad -2500(P^2+2P+1)$

$= \underline{-2500P^2+2500P}$ //

(3)

(ア)

$E(Y)$

$= E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$

$= nE(X_i)$

$= \underline{50n(P+1)}$ //

$V(Y)$

$= V(X_1+X_2+\cdots+X_n)$

$= V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n)$

($\because X_1,\cdots,X_n$ はそれぞれ独立)

$= \underline{2500n(-P^2+P)}$ //

(イ) $Z=100n-Y$

より

$W=YZ=100nY-Y^2$

$E(W)$

$= E(100nY-Y^2)$

$= 100nE(Y)-E(Y^2)$

$= 100nE(Y)-\{V(Y)+(E(Y))^2\}$

$= 5000n^2(P+1)$
$\quad +2500n(P^2-P)-2500n^2(P+1)^2$

$= 5000n^2+2500n(P^2-P)$
$\quad -2500n^2(P^2+1)$

$= \underline{-2500n(nP^2-P^2+P-n)}$ //

(ウ)

$\dfrac{dE(Y)}{dP}$

$= -2500n(2(n-1)P+1)$

nは自然数より

$\dfrac{dE(Y)}{dP}<0$

より $P=0$ のとき

$\underline{最大値\ 2500n^2}$ //