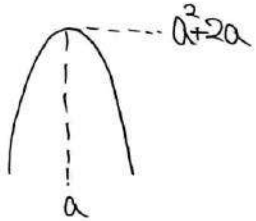
2020 東海大(医) 1日目 (2/2)

1

(1) $y=-(x-a)^2+a^2+2a$



$2\leqq a^2+2a<3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a-2\geqq 0 \\ a^2+2a-3<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\leqq -1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}\leqq a \\ -3<a<1 \end{cases}$

$\downarrow a>0$

$\underline{-1+\sqrt{3}\leqq a<1}$ //

(2)

中心$(\sqrt{t},3)$, $(0,t)$の

キョリが $1+3=4$ より

$\sqrt{t+(3-t)^2}=4$

$\therefore t^2-5t+9=16$

$\therefore t^2-5t-7=0$

$\therefore \underline{t=\dfrac{5+\sqrt{53}}{2}}$ // $(\because t\geqq 0)$

(3)

$\cos^4\dfrac{\pi}{24}-\sin^4\dfrac{\pi}{24}$

$=\underbrace{\left(\cos^2\dfrac{\pi}{24}+\sin^2\dfrac{\pi}{24}\right)}_{1}\left(\cos^2\dfrac{\pi}{24}-\sin^2\dfrac{\pi}{24}\right)$

$=\cos\dfrac{\pi}{12}$

$=\underline{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ //

$\cos 15^\circ$と$\sin 15^\circ$は暗記

(4)

$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$=(b+c)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2\}$

$\quad-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=(b+c)(3a^2+3ab+3ca+3bc)$

$=\underline{3(a+b)(b+c)(c+a)}$ //

※ $(b+c)$を因数にもつ時点で

$(a+b)$, $(c+a)$も因数にもつ.

(5)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -10 & 100 & \\ \hline 1\ \ 10 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ & 1 & 10 & & \\ \hline & & -10 & 0 & \\ & & -10 & -100 & \\ \hline & & & 100 & 100 \\ & & & 100 & 1000 \end{array}$$

$n^3+100=(n+10)(n^2-10n+100)-900$

$\Downarrow$

$\dfrac{n^3+100}{n+10}=n^2-10n+100-\dfrac{900}{n+10}$

割り切れるための最大のnは $\underline{890}$ //

(6)

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\int_0^x x^4e^{xt}dt-\int_0^2 16e^{xt}dt}{x-2}$

$f(x)=\int_0^x x^4e^{xt}dt$

$\quad=x^4\int_0^x e^{xt}dt$

$f'(x)=4x^3\int_0^x e^{xt}dt$

$\quad+x^4e^{x}$

$=\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=f'(2)$

$=32\int_0^2 e^{xt}dt+16e^4$

$=32\left[\dfrac{1}{2}e^{xt}\right]_0^2+16e^4$

$=\underline{32e^4-16}$ //

2

(1)

$-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+2=0$

$\Leftrightarrow x^2-x-4=0$

$\therefore \underline{\alpha=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$ // $(\alpha>\beta)$

$\int_1^\alpha\left(-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+2\right)dx$

$=-\dfrac{1}{2}\int_1^\alpha(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=-\dfrac{1}{2}\left\{\left[\dfrac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)\right]_1^\alpha\right.$

$\quad\left.-\int_1^\alpha\dfrac{1}{2}(x-\alpha)^2dx\right\}$

$=-\dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{1}{2}(1-\alpha)^2(1-\beta)+\dfrac{1}{6}(1-\alpha)^3\right\}$

$=\dfrac{(1-\alpha)^2}{4}\left\{\underbrace{1-\beta}_{\alpha}-\dfrac{1}{3}(1-\alpha)\right\}$

$=\dfrac{-\alpha+5}{4}\cdot\dfrac{4\alpha-1}{3}$ $\quad\alpha^2-\alpha-4=0$

$=\dfrac{-4\alpha^2+21\alpha-5}{12}$ $\quad\alpha^2=\alpha+4$

$=\dfrac{17\alpha-21}{12}$

$=\underline{\dfrac{17}{12}\alpha}-\underline{\dfrac{7}{4}}$ // //

(2)

真数条件

$$\begin{cases} x^2+y-4>0 \\ x-y+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>-x^2+4 \\ y<x+2 \end{cases}$$

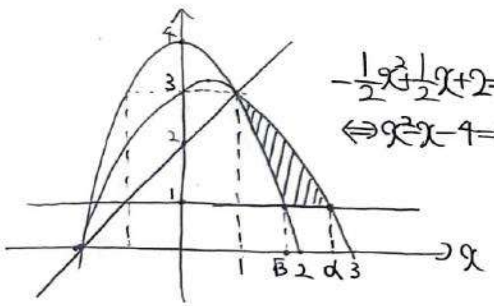
対数不等式解くと

$x^2+y-4<x-y+2$

$\Leftrightarrow 2y<-x^2+x+6$

$\Leftrightarrow y<-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$

$=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{8}$



$-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2=0$

$\Leftrightarrow x^2-x-4=0$

(i) $x=\alpha$ とDが交わるのは

$1<\alpha<\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ //

(ii) $x=b$ と 〃

$1<b<3$ //

(iii)

面積は

$\int_1^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+2\right)dx$

$-\int_1^{\sqrt{3}}(-x^2+3)dx$

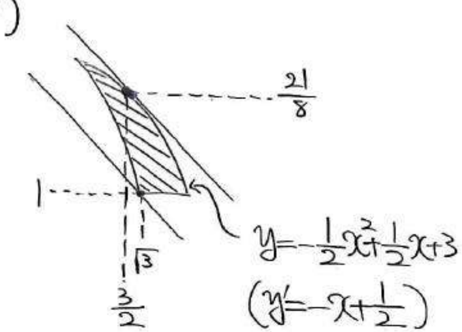
$=\frac{17}{12}\alpha-\frac{7}{4}-\left[-\frac{1}{3}x^3+3x\right]_1^{\sqrt{3}}$

$=\frac{17}{12}\alpha-\frac{7}{4}-\left\{2\sqrt{3}-\frac{8}{3}\right\}$

$=\frac{17+17\sqrt{17}}{24}-\frac{42}{24}+\frac{64}{24}-2\sqrt{3}$

$=\frac{17}{24}\sqrt{17}-2\sqrt{3}+\frac{13}{8}$ //

(iv)



図より

$\max k=\frac{3}{2}+\frac{21}{8}=\frac{33}{8}$

$\min k=\sqrt{3}+1$

Dの境界を考えると

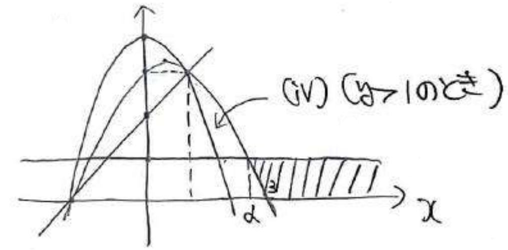
$\sqrt{3}+1<k<\frac{33}{8}$ //

(3)

$0<y<1$ のとき

対数不等式解くと

$y>-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$



図より $y>1$ のときも考慮して

$k>1+\sqrt{3}$ //

$\boxed{3}$

(1)(i)

$P(③②①)$

$=P(②勝ち \to ③勝ち)$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ //

(ii)

$P(①が②より左)$

$=P(①\sim)$

$+P(③①②)$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$ //

(2)

$P(ⓝが1番左)$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$ //

引き分け以外

(3)

$P(n回でⓝが1番左)$

$=P(n-1回でⓝが1番左)$

$+P(n-1回でⓝが2番目)$

$=\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\cdot\frac{2}{3}+{}_{n-1}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{2^{n-1}+(n-1)2^{n-2}}{3^n}$

$=\frac{(n+1)2^{n-2}}{3^n}$ //

↓

(4)

P(n回で n が1番右)

$= P(n-1$回目に1番にいる$)$

$+ P(n-1$回目に2番にいる$)$

$+ P(n-1$回目にn番にいる$)$

$= \dfrac{2^{n-2}}{3^{n-1}} \cdot \dfrac{1}{3}$

$+ {}_{n-1}C_1 \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}$

$+ \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{2^{n-2} + (n-1)2^{n-2} + 1 + 2^{n-2}}{3^n}$

$= \dfrac{(n+1)2^{n-2}+1}{3^n}$ //

(5)

P($n-1$回で最初と同じ)

$= P($ずーっとひきわけ$)$

$+ P($ずーっと2番が勝ち$)$

$= \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{2}{3^{n-1}}$

(6)

P(n回で最初と同じ)

$= P($ずーっとひきわけ$)$

$+ P($ずーっと1番が勝つ$)$

$+ P(n-1$回2番が勝ち, 1回ひきわけ$)$

$= \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + {}_nC_1 \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{n+2}{3^n}$ //