2020 東京大(理系)

第1問

(1)

仮に $a<0$ とすると

$\lim_{x\to\infty} x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=-\infty$

となり $x>p$ が $ax^2+bx+c>0$ を満たすことに反する.

同様に他の2次不等式にも同じことが言えるので a, b, c はすべて0以上である.

(2)

仮に $a>0$ かつ $b>0$ かつ $c>0$ とすると

$\lim_{x\to\infty} x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=\infty$

$\lim_{x\to\infty} x^2\left(b+\frac{c}{x}+\frac{a}{x^2}\right)=\infty$

$\lim_{x\to\infty} x^2\left(c+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)=\infty$

となり 3つの2次不等式をすべて満たす集合が $x>p$ であることに反する. (1)より a, b, c はどれも負になることはないので a, b, c の少なくとも1個は0である.

(3)

(i) a, b, c のうち0が1つのとき

($c=0$ として一般性を失わない)

$$\begin{cases} ax^2+bx>0 \iff x<-\frac{b}{a},\ 0<x \\ bx^2+a>0 \cdots x\text{はすべての実数} \\ ax+b>0 \iff x>-\frac{b}{a} \end{cases}$$

共通範囲は $x>0$

(ii) a, b, c のうち0が2つのとき

($b=c=0$ として一般性を失わない)

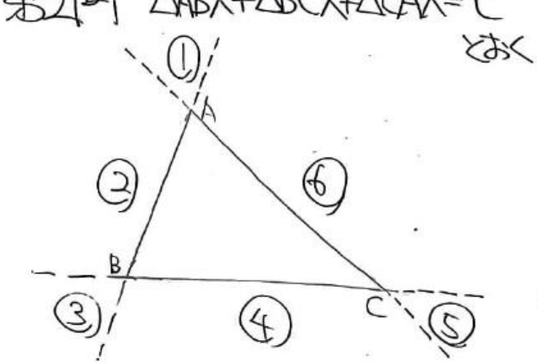
$$\begin{cases} ax^2>0 \cdots x=0\text{以外のすべての実数} \\ a>0 \cdots x\text{はすべての実数} \\ ax>0 \iff x>0 \end{cases}$$

共通範囲は $x>0$

(i)(ii)より $p=0$

第2問

$\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX=t$ とおく



Xが$\triangle ABC$の周および内部にあると $\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX=1$ となるので, Xは外部にある.

まず上の①, ③, ⑤にXがあるときを考える. ①のときを代表して考える.

$\triangle BCX=\triangle ABX+\triangle CAX+\triangle ABC$

$\iff 2\times\triangle BCX=t+1$

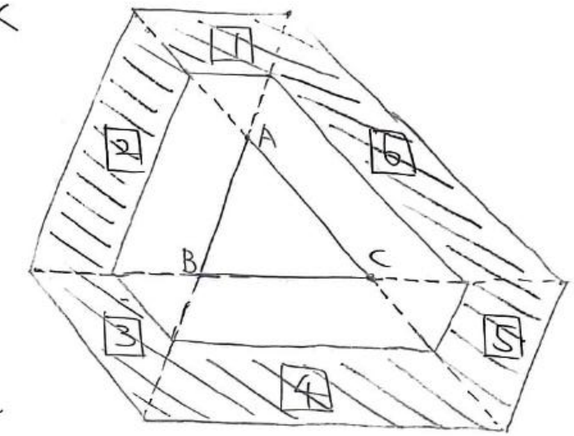
$\therefore \frac{3}{2}\leqq\triangle BCX\leqq 2$

上の②, ④, ⑥にXがあるときは(代表して②のときを考える)

$\triangle ABX+\triangle ABC=\triangle BCX+\triangle CAX$

$\iff 2\times\triangle ABX=t-1$

$\therefore \frac{1}{2}\leqq\triangle ABX\leqq 1$



$\boxed{1}=\boxed{3}=\boxed{5}=\frac{3}{4}$

$\boxed{2}=\boxed{4}=\boxed{6}=4\times\frac{7}{16}=\frac{7}{4}$

求める面積は上の図の $\boxed{1}\sim\boxed{6}$ までたすと

$\frac{3}{4}\times3+\frac{7}{4}\times3=\frac{15}{2}$ //

第3問

(1)

$$g(t)=\frac{y(t)}{x(t)}$$

$$=\frac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$$

$$=3\sqrt{-1+\frac{2}{1+t}}$$

これより $-1<t\leqq 1$ において

単調減少する.

(2)

$f(t)$

$$=\sqrt{(1+t)^3+9(1+t)^2(1-t)}$$

$$=(1+t)\sqrt{1+t+9-9t}$$

$$=(1+t)\sqrt{10-8t}$$

$f'(t)$

$$=\sqrt{10-8t}+(1+t)(10-8t)^{-\frac{1}{2}}(-8)\frac{1}{2}$$

$$=\frac{10-8t-4-4t}{\sqrt{10-8t}}$$

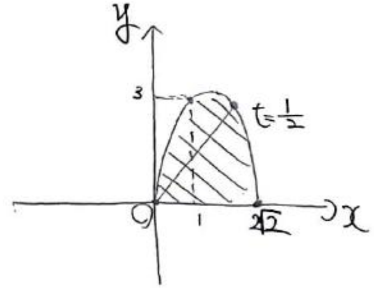
$$=\frac{6(1-2t)}{\sqrt{10-8t}}$$

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$

$t=\frac{1}{2}$ のとき

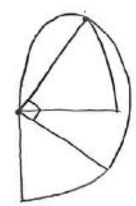
最大値 $\underline{\frac{3}{2}\sqrt{6}}$ //

(3)



時計まわりに

90°回転.



求める面積は

$$\int_0^{2\sqrt{2}} y\,dx+\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)^2\pi\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\int_{-1}^{1}3(1+t)\sqrt{1-t}\,\underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{\frac{3}{2}(1+t)^{\frac{1}{2}}}dt+\frac{54}{16}\pi$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{9}{2}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt+\frac{27}{8}\pi$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{9}{2}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt+\frac{27}{8}\pi$$

$$=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt+\frac{27}{8}\pi$$

$$=\frac{9}{4}\pi+\frac{27}{8}\pi$$

$$=\underline{\frac{45}{8}\pi}$$ //

第4問

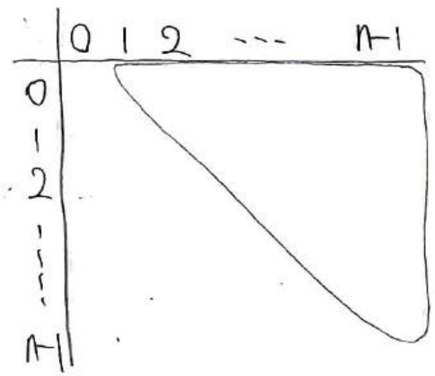
(1)

$a_{n,2}$

$$=2^0\cdot2^1+2^0\cdot2^2+\cdots+2^0\cdot2^{n-1}$$

$$+2^1\cdot2^2+2^1\cdot2^3+\cdots$$

$$\cdots\cdots+2^{n-2}\cdot2^{n-1}$$



$$=\frac{1}{2}\left\{\left(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}\right)^2-\left(2^0\cdot2^0+2^1\cdot2^1+\cdots+2^{n-1}\cdot2^{n-1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)^2-\frac{1-2^{2n}}{1-4}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(2^n-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-2^{2n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}\cdot2^{2n}-2\cdot2^n+\frac{4}{3}\right\}$$

$$=\underline{\frac{1}{3}\cdot2^{2n}-2^n+\frac{2}{3}}$$ //

(2)

$f_n(x)$

$$=(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^nx)$$

と表せる.

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\underline{1+2^nx}$$ //

また

$f_n(2x)$

$$=(1+2x)(1+4x)(1+2^3x)\cdots(1+2^nx)$$

より

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=\underline{1+x}$$ //

(3)

(2)より

$f_{n+1}(x)=f_n(x)(1+2^n x)$

$\Leftrightarrow 1+a_{n+1,1}x+\cdots+a_{n+1,k+1}x^{k+1}$
$+\cdots+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$
$=(1+a_{n,1}x+\cdots+a_{n,k}x^k+\cdots+a_{n,n}x^n)$
$(1+2^n x)$

上で x^{k+1} の係数比較すると

$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^n a_{n,k}$ …①

また

$f_{n+1}(x)=f_n(2x)(1+x)$

$\Leftrightarrow 1+\cdots+a_{n+1,k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$
$=(1+a_{n,1}2x+\cdots+a_{n,k}(2x)^k+\cdots)$
$(1+x)$

上で x^{k+1} の係数比較すると

$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}2^{k+1}+a_{n,k}2^k$ …②

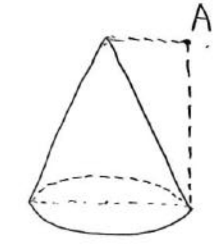
①$\times 2^{k+1}-$②

$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+k+1}-2^k)a_{n,k}$

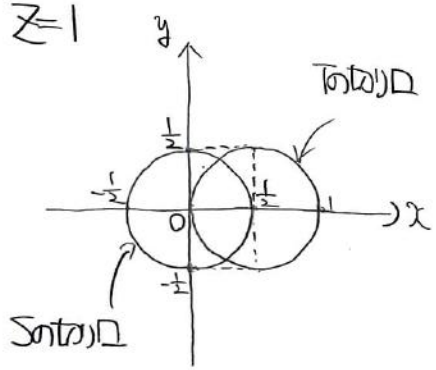
$\therefore a_{n+1,k+1}=\dfrac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}$ //

第5問

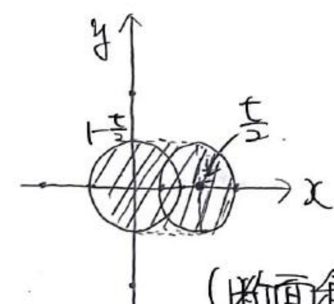
(1)



$z=1$



$z=t$ での切り口は



(断面積)
$=\frac{t}{2}\left(1-\frac{t}{2}\right)+\left(1-\frac{t}{2}\right)^2\pi$

求める体積は

$\int_0^2\left\{\frac{t}{2}\left(1-\frac{t}{2}\right)+\left(1-\frac{t}{2}\right)^2\pi\right\}dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^2\{t(2-t)+(2-t)^2\pi\}dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^2\left(-t^2+2t+\pi(t-2)^2\right)dt$

$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2+\frac{\pi}{3}(t-2)^3\right]_0^2$

$=\frac{1}{4}\left\{-\frac{8}{3}+4-\frac{\pi}{3}(-2)^3\right\}$

$=\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}$ //

第6問

(1) $f(\theta)=A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)$
とおく.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)>0$

$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-A-\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\alpha\right)<0$

$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=A-\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)>0$

$f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=-A-\sin\left(\frac{7}{4}\pi+\alpha\right)<0$

$f\left(\frac{9}{4}\pi\right)=A-\sin\left(\frac{9}{4}\pi+\alpha\right)>0$

これより

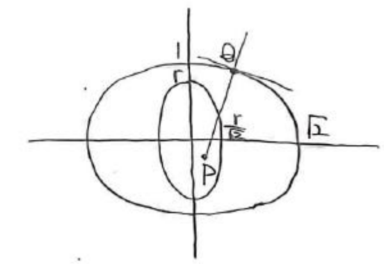
$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi,$
$\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\theta<\frac{9}{4}\pi$

で1つずつ解をもつ.

なお、$0\leq\theta<2\pi$ でも少なくとも4つ解にもつ.

(2) $2x^2+y^2<r^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{r^2}{2}}+\dfrac{y^2}{r^2}<1$



$P\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\alpha,\ t\sin\alpha\right)\ (0\leq t<r)$

とおく

$Q(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ における

接線は

$\sqrt{2}\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y=1$

PQと接線が平行であるとき

$\overrightarrow{PQ}$ と $\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ が平行.

つまり

$$\left(\sqrt{2}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}t\cos\alpha\right)\sin\theta$$
$$-(\sin\theta-t\sin\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta=0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos\theta-t\cos\alpha)\sin\theta$$
$$-(\sin\theta-t\sin\alpha)\cos\theta=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta\cos\theta-t(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin2\theta-t\sin(\theta-\alpha)=0$$

(i) $t=0$ のとき

$$\sin2\theta=0$$

となるので $\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi$

の4コ解をもつ.

(ii) $t>0$ のとき

$$\frac{1}{2t}\sin2\theta-\sin(\theta-\alpha)=0$$

ここで $\frac{1}{2t}>1$ つまり $0<t<\frac{1}{2}$

ならば (i)より θは少なくとも

4コ解をもつ. つまり $r=\frac{1}{2}$

とすると条件をみたす.

$t=\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$ として

$$\sin2\theta-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

が θの解を3コしかもたないこと

を示せば十分.

$$\sin2\theta=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

より

$$2\theta=\theta-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \theta=2k\pi-\frac{\pi}{4}$$

$k=1$ で $\theta=\frac{7}{4}\pi$

また

$$2\theta=\pi-\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+2l\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta=\frac{2l}{3}\pi+\frac{5}{12}\pi$$

$l=0,1$ で $\theta=\frac{5}{12}\pi,\frac{13}{12}\pi$

以上で $r>\frac{1}{2}$ とすると条件を

みたさない.

求める rの最大値は $\frac{1}{2}$ //