2020 日本大(医)

[1]

(1) $4x^2-7x-1=x^2-2x+1$

$\Leftrightarrow 3x^2-5x-2=0$

$\Leftrightarrow (3x+1)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow \underline{x=-\frac{1}{3},\ 2}$ //

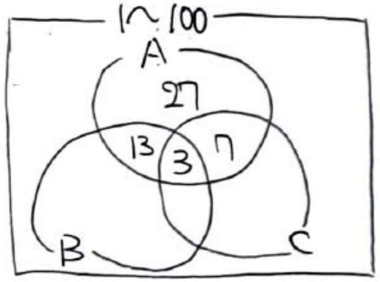
$4x^2-7x-1-y-4\times(x^2-2x+1-y)=0$

$\Leftrightarrow 3y=-x+5$

$\Leftrightarrow \underline{y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}$ //

(2)

$n(A\cap B\cap C)=\underline{3}$ //



$n(A\cap(\overline{B\cup C}))=\underline{27}$ //

(3) $c=8$を代入.

$a^4+64a^2-64b^2-b^4=0$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a^2+b^2+64)=0$

$\therefore a=b$

余

$\cos C=\dfrac{2a^2-\overset{64}{c^2}}{2a^2}=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2-32}{a^2}=-\dfrac{1}{2}$

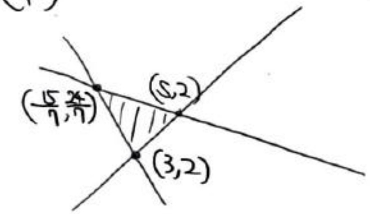
$\Leftrightarrow 2a^2-64=-a^2$

$\Leftrightarrow 3a^2=64$

$\Leftrightarrow a^2=\dfrac{64}{3}$

$\therefore a=\dfrac{8}{\sqrt{3}}=\underline{\dfrac{8\sqrt{3}}{3}}$ //

(4)



$x+3y=k \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{k}{3}$

とおく.

$(3,2)$のとき min $k=\underline{9}$ //

$(5,2)$のとき max $k=\underline{11}$ //

[2]

(1)

$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=\underline{6}$ //

$|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$=\left|\begin{pmatrix}-t\\1-t\\2t+2\end{pmatrix}\right|^2$

$=t^2+(1-t)^2+4(t+1)^2$

$=6t^2+6t+5$

$=6\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$

$t=-\frac{1}{2}$のとき最小値 $\sqrt{\frac{7}{2}}=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{14}}$ //

(2)

$y=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+1-2\sin^2\frac{x}{2}$ $\quad t=\sin\frac{x}{2}$

$=-2t^2+\frac{1}{2}t+1$

$=-2\left(t^2-\frac{1}{4}t\right)+1$

$=-2\left(t-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{33}{32}$ $(0\leqq t\leqq 1)$

$t=1$のとき min $y=\underline{-\frac{1}{2}}$ //

$t=\frac{1}{8}$のとき max $y=\underline{\frac{33}{32}}$ //

(3)

$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

$a_1a_2a_3a_4a_5a_6$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\cdot 1$

$=\underline{-\frac{1}{16}}$ //

$2020\div 6=336$ 余り 4

$\sum_{n=1}^{2020} a_n$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

$+\cdots$

$+\cdots \quad +a_{2016}$

$+a_{2017}+a_{2018}+a_{2019}+a_{2020}$

$=0\times 336+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\underline{-\frac{3}{2}}$ //

(4)

P

$=a^4-25a^2-50a-25$

$=a^4-25(a+1)^2$

$=\underline{(a^2+5a+5)(a^2-5a-5)}$ //

$a^2+5a+5=1$のとき

$a=-1,-4$

$a^2-5a-5=1,\ 31$

$a^2-5a-5=1$のとき

$a=-1,\ 6$

$a^2+5a+5=-1,\ 71$

$a^2+5a+5=-1$のとき

$a=-2,-3$

$a^2-5a-5=9,\ 19$

$a^2-5a-5=-1$のとき

aが有理数にならない.

全部で$|P|$が素数になるのは

$\underline{3コ}$ //. 最大の素数は$\underline{71}$ //

[3]

(1) $n=50$のとき

$A=10+x\cdot 1+(50-x)\cdot 2=-x+110$

$B=6+x\cdot 3+(50-x)\cdot 1=2x+56$

これらが等しいとき

$3x=54 \iff \underline{x=18}$ //

このとき各自, $\underline{92}$点 //

(2) $n=5$のとき

$A=-x+20 \quad B=2x+11$

これらが等しいとき $x=3$

この確率は

${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\underline{\frac{40}{243}}$ //

(3) $n=6$のとき

$A=-x+22 \quad B=2x+12$

$A<B$のとき

$-x+22<2x+12$

$\iff 10<3x$

$\therefore x=4,5,6$

この確率の和は

${}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^6$

$=\frac{60+12+1}{729}$

$=\underline{\frac{73}{729}}$ //

[4]

(1)

$f'(x)$

$=\frac{e^x x^2(1+e^x)-e^x\{2x(1+e^x)+x^2e^x\}}{x^4(1+e^x)^2}$

$=\frac{e^x x\{(1+e^x)x-2-2e^x-xe^x\}}{x^4(1+e^x)^2}$

$=\underline{\frac{e^x(x-2-2e^x)}{x^3(1+e^x)^2}}$ //

(2)

$g(x)=x-2-2e^x$ とおく

$g'(x)=1-2e^x<0$

$g(x)$は単調減少.

$g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}-2\sqrt{e}<0$

より $g(x)<0$

つまり $f'(x)<0 \ \left(\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1\right)$.

$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$において $f(x)$は

単調減少.

(3)

$f(x)$は$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$で単調減少

より

$\frac{e}{1+e}\leqq f(x)\leqq\frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}$.

また

$1-px^2\leqq\frac{1}{1+e^x}\leqq 1-qx^2$

$\iff -px^2\leqq\frac{-e^x}{1+e^x}\leqq -qx^2$

$\iff q\leqq f(x)\leqq p$

が常に成り立つためには

$\begin{cases} q\leqq\frac{e}{1+e} \\ \frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}}\leqq p \end{cases}$

であればいいので

$\underline{p=\frac{4\sqrt{e}}{1+\sqrt{e}} \quad q=\frac{e}{1+e}}$ のとき //

$|p-q|$が最小.

[5]

(1) $f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

$x=1$で極大値$\frac{1}{2}$

$x=-1$で極小値$-\frac{1}{2}$ //

(2)

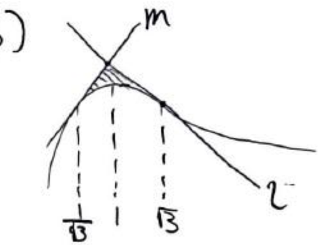
$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}$

$=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

$x=\sqrt{3}$で変曲点.

$\underline{l: y=\frac{-2}{16}(x-\sqrt{3})+\frac{\sqrt{3}}{4}=-\frac{x}{8}+\frac{3}{8}\sqrt{3}}$ //

(3)



$m: y=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{16}{9}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{3}{4\sqrt{3}}$

$=\frac{3}{8}x+\frac{\sqrt{3}}{8}$

lとmの交点は

$-\frac{x}{8}+\frac{3}{8}\sqrt{3}=\frac{3}{8}x+\frac{\sqrt{3}}{8} \iff x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

求める面積は

$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{3}{8}x+\sqrt{3}-\frac{x}{1+x^2}\right)$

$+\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{x}{8}+\frac{3}{8}\sqrt{3}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$=\left[\frac{3}{16}x^2+\sqrt{3}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$+\left[-\frac{1}{16}x^2+\frac{3}{8}\sqrt{3}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}$

$=\cdots$

$=\underline{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}\log 3}$ //