2020 京都大(理系)

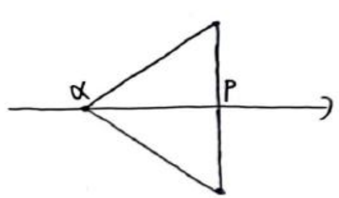
1

$$z^3+3az^2+bz+1=0$$

この解が複素数平面上で正三角形をなすので，解は実数解と互いに共役な虚数解である．
これらを α，$p\pm qi$ とおくと解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+2p=-3a \quad \cdots ① \\ \alpha(p+qi)+\alpha(p-qi)+p^2+q^2=b \cdots ② \\ \alpha(p^2+q^2)=-1 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

また図より



$$\begin{cases} q=\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ |p-\alpha|=\frac{3}{2}a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow p^2-2p\alpha+\alpha^2=\frac{9}{4}a^2$$

これに $\alpha=-2p-3a$ を代入

$$p^2-2p(-2p-3a)+(-2p-3a)^2=\frac{9}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow 9p^2+18pa+\frac{27}{4}a^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4p^2+8pa+3a^2=0$$

$$\Leftrightarrow (2p+a)(2p+3a)=0$$

$2p+3a=0$ とすると $\alpha=0$ となって③より $\alpha\neq0$ なので不適．

$$\therefore p=-\frac{a}{2}$$

$$\alpha=a-3a=-2a$$

③は

$$-2a\left(\frac{a^2}{4}+\frac{3}{4}a^2\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow 2a^3=1$$

$$\therefore \underline{a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=2^{-\frac{1}{3}}$$

$$b=2\alpha p+p^2+q^2$$

$$=2(-2a)\left(-\frac{a}{2}\right)+a^2$$

$$=3a^2=\underline{3\cdot2^{-\frac{2}{3}}}$$

解は

$$\alpha=-\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=-2\cdot2^{-\frac{1}{3}}=\underline{-2^{\frac{2}{3}}}$$

$$p\pm qi=-2^{-1}\cdot2^{-\frac{1}{3}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2^{-\frac{1}{3}}i$$

$$=\underline{-2^{-\frac{4}{3}}\pm\sqrt{3}\cdot2^{-\frac{4}{3}}i}$$

2

(1) $\alpha^n+\beta^n$ $(n\in\mathbb{N})$ は整数でかつ偶数であることを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$$\alpha+\beta=2p$$

$n=2$ のとき

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=4p^2+2$$

$$=2(2p^2+1)$$

より成立．

(ii) $n=k, k+1$ のとき成立つと仮定すると

$$\alpha^k+\beta^k=2s$$
$$\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}=2t \quad (s,t\in\mathbb{Z})$$

とおく．

$$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$$

$$=(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)$$

$$=2t\cdot2p+2\cdot2s$$

$$=2(2tp+2s)$$

より $n=k+2$ のときも成立．

(i)(ii)より題意は示された．

(2)

$$\alpha^n+\beta^n=2m_n$$

とおく

$$(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$$

$$=(-\alpha)^n\sin\{(2m_n-\beta^n)\pi\}$$

$$=-(-\alpha)^n\sin(\beta^n\pi)$$

$$=-(-\alpha)^n\frac{\sin\beta^n\pi}{\beta^n\pi}\cdot\beta^n\pi$$

$$=-\pi(-\alpha\beta)^n\frac{\sin\beta^n\pi}{\beta^n\pi}$$

$$=-\pi\frac{\sin\beta^n\pi}{\beta^n\pi}$$

$\alpha\beta=-1$ より $|\alpha\beta|=1$

$|\alpha|>1$ より $0<|\beta|<1$

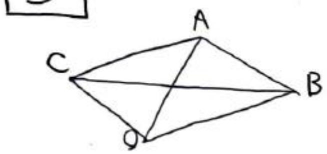
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\beta^n=0$$

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\pi\frac{\sin\beta^n\pi}{\beta^n\pi}\right\}$$

$$=\underline{-\pi}$$

$\boxed{3}$



$A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

とおいて一般性を失わない.

$C(c_1, c_2, c_3)$ とおくと $(c_3>0)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = -\frac{\sqrt{6}}{4}$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = -\frac{\sqrt{6}}{4}$

$\Downarrow$

$c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ c_1 = 0$

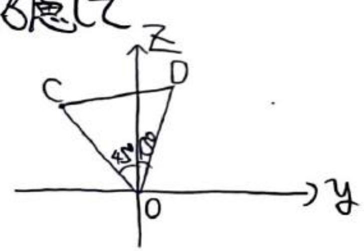
$|\overrightarrow{OC}|^2 = 0 + \frac{1}{2} + c_3^2 = 1$

$\therefore c_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\triangle COD$も正三角形であるが

$k>0$より Dの位置は対称性

を考慮して



図のように yz平面の第1象限

にある.

$D(0, \cos 75^\circ, \sin 75^\circ)$

$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$k = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 75^\circ$

$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ //

$\boxed{4}$

以下3を法とする合同式とする.

(i) $n\equiv 1$のとき

$f(m,n) \equiv m^3 + 5 \equiv 0$

$\therefore m \equiv 1$

$m = 3k+1,\ n = 3l+1\ (k, l \in \mathbb{Z})$

とおくと

$f(m,n)$

$= (3k+1)^3 + (3l+1)(3l+2) + 3$

$= 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 + 9l^2 + 9l + 5$

$= 3\{9k^3 + 9k^2 + 3k + 3l^2 + 3l + 2\}$

これより $B(f(m,n)) = 1$

となる.

(ii) $n \equiv 2$のとき

$f(m,n) \equiv m^3 + 4 + 2 + 3$

$\equiv m^3 \equiv 0$

$\therefore m \equiv 0$

$m = 3k,\ n = 3l+2\ (k, l \in \mathbb{Z})$

とおくと

$f(m,n)$

$= (3k)^3 + (3l+2)(3l+3) + 3$

$= 27k^3 + 9l^2 + 15l + 9$

$= 3(9k^3 + 3l^2 + 5l + 3)$

$l = 3s\ (s \in \mathbb{Z})$ とおくと

$f(m,n)$

$= 3(9k^3 + 27s^2 + 15s + 3)$

$= 3^2(3k^3 + 9s^2 + 5s + 1)$

$n = 9s+2$ であるものは

$n = 2, 11, 20, 29$

このとき

$n^2+n+3 = 9,\ 9\cdot 15,\ 9\cdot 47,\ 9\cdot 97$

となり

$n^2+n+3 = 9P\ (P = \{1, 15, 47, 97\})$

とおくと

$f(m,n) = m^3 + n^2 + n + 3$

$= 27k^3 + 9P$

$= 9(3k^3 + P)$

$P = 15$のとき $B(f(m,n)) \geqq 3$

このとき

$f(m,n) = 3^3(k^3 + 5)$

より $B(f(m,n)) \geqq 4$ なのは

$k^3 + 5 \equiv 0 \quad \therefore k \equiv 1$

$1 \leqq m \leqq 30$ かつ $m = 3k$ かつ $k \equiv 1$

なのは $k = 1, 4, 7, 10$

$m = 3, 12, 21, 30$

$n = 11$より求める(m,n)は

$(m,n) = (3,11), (12,11),$

$(21,11), (30,11)$

でこのとき $A(m,n)$の最大値は

4 //

5

1行目は$4!=24$通り.

a	b	c	d

2行目は

a	b	c	d
b			

a d c
c d a
d a c

a	b	c	d
c			

a d b
d a b
d b a

a	b	c	d
d			

a b c
c a b
c b a

上のように9通り

3行目は

(i)

a	b	c	d
c	d	a	b

左上,右上の2×2の正方形の中がすべての数字が使われているとき

$2\times2=4$通り

(ii)

a	b	c	d
c	a	d	b
○	×		
×	○		

左上,右上の2×2の正方形の中の対角線が1つ同じのとき

① ○がdのとき

1通り

② ×がdのとき

1通り　　合計2通り

(iii)

a	b	c	d
b	a	d	c

左上,右上の2×2の正方形の中の対角線が2つ同じのとき

$2\times2=4$通り

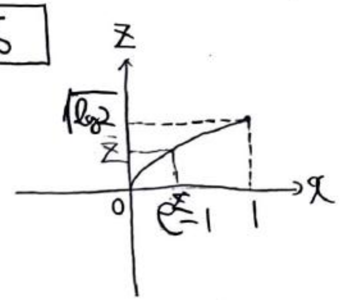
以上より

$24\times((\mathrm{i})\times4+(\mathrm{ii})\times2+(\mathrm{iii})\times4)$

$=24\times(2\times4+6\times2+1\times4)$

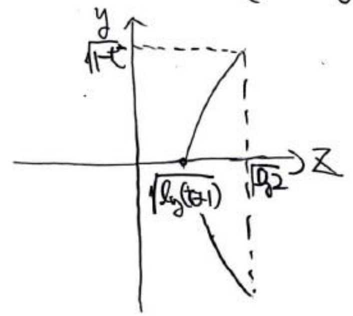
$=\underline{576通り}$

6



Sの方程式：$x^2+y^2=(e^{z^2}-1)^2$

$x=t$のとき　$y^2=(e^{z^2}-1)^2-t^2$



このときのVの断面積$f(t)$は

$f(t)=\{(1-t^2+\log2)\pi-(\log(t+1))\pi\}$

求める体積Vは

V

$=2\int_0^1 f(t)dt$

$=2\pi\int_0^1\{(1-t^2+\log2)-(\log(t+1))\}dt$

$=2\pi\Big[(1+\log2)t-\frac{1}{3}t^3$

$\quad-(t+1)\log(t+1)+t\Big]_0^1$

$=2\pi\{1+\log2-\frac{1}{3}-2\log2+1\}$

$=\underline{2\pi\left(\frac{5}{3}-\log2\right)}$