2020 東京慈恵会医科大

1. (ア)

P(1回でAに白が2コ以上)

$=$ P(1回でAに白が2コ)

$+$P(　〃　3コ)

$=\{P(RW\to WW)$

$+P(RR\to RW)\}$

$+\{P(RR\to WW)\}$

$$=\left\{\frac{3\cdot1}{{}_4C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}+\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\times\frac{3\cdot3}{{}_6C_2}\right\}$$

$$+\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}$$

$$=\frac{18+27+9}{90}$$

$$=\frac{54}{90}=\frac{3}{5}$$

(イ)

P(2回でオール白)

$=$P(1回でAに白が2コ)

$\times P(RR\to WW)$

$+$P(1回でAに白が3コ)

$\times P(RW\to WW)$

$$=\frac{45}{90}\cdot\frac{1}{{}_4C_2}\cdot\frac{1}{{}_6C_2}$$

$$+\frac{9}{90}\cdot\frac{3}{{}_4C_2}\cdot\frac{1}{{}_6C_2}$$

$$=\frac{5+3}{10\cdot6\cdot15}$$

$$=\frac{2}{225}$$

2.

(1)

$g(t)=t-\log(1+t)\ (t\geqq0)$ とおく.

$$g'(t)=1-\frac{1}{1+t}$$

$$=\frac{t}{1+t}\geqq0\quad(t\geqq0)$$

$g(t)$は単調増加, $g(0)=0$

より $g(t)\geqq0$

$\therefore\ \log(1+t)\leqq t$

$h(t)=\log(1+t)-\dfrac{t}{1+t}\ (t\geqq0)$ とおく.

$$h'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{1+t-t}{(1+t)^2}$$

$$=\frac{t}{(1+t)^2}\geqq0\quad(t\geqq0)$$

同様に $h(t)\geqq0$

$$\therefore\ \frac{1}{1+t}\leqq\log(1+t)$$

(2)

$$\log f_n(x)=\sum_{k=n}^{pn}\log\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

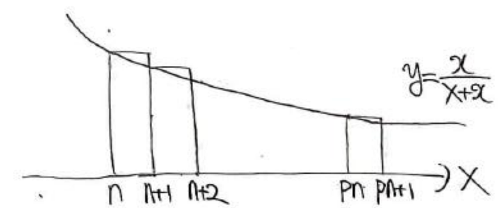
$$\leqq\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{\frac{k}{n}}$$

また

$$\log f_n(x)\geqq\sum_{k=n}^{pn}\frac{\frac{x}{k}}{1+\frac{x}{k}}$$

$$=\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k+x}$$



図より

$$\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{k+x}\geqq\int_n^{pn+1}\frac{x}{X+x}dX$$

$$=\Big[x\log|X+x|\Big]_n^{pn+1}$$

$$=x\log\frac{pn+1+x}{n+x}$$

改めて

$$x\log\frac{p+\frac{1+x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\leqq\log f_n(x)\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{\frac{k}{n}}$$

最左辺で $n\to\infty$ とすると

$x\log p$

最右辺で $n\to\infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{pn}\frac{x}{\frac{k}{n}}$$

$$=\int_1^p\frac{x}{X}dx$$

$$=\Big[x\log|X|\Big]_1^p$$

$$=x\log p$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\log f_n(x)=x\log p$$

$$=\log p^x$$

$$\therefore\ f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

$$=p^x$$

3.

(1) $a=2^{l}\cdot c$ (cは奇数) とする.

(i) bが奇数のとき

$2a(2a+b)$

$=2^{l+1}\cdot c(2a+b)$

cも$2a+b$も奇数なので

$2a(2a+b)$は2^{l+1}の倍数だが

2^{l+2}の倍数でない.

(ii) bが偶数だが4の倍数でないとき, $b=2d$ (dは奇数) とおくと

$a(a+b)$

$=2^{l}\cdot c(2^{l}c+2d)$

$=2^{l+1}\cdot c(2^{l-1}c+d)$

cも$2^{l-1}c+d$も奇数なので

$a(a+d)$は2^{l+1}の倍数だが

2^{l+2}の倍数でない.

(2) (i) bは奇数 (fとおく) のとき

$a_n=2^{n}$ $(n\geqq 3)$

とすると

$\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$

$=\dfrac{2^{n}(2^{n}+f)}{2^{2n}}$

$=\dfrac{2^{n}+f}{2^{n}}$

$=1+\dfrac{f}{2^{n}}$ $\quad f=2k+1$ (kは整数)

$=1+\dfrac{k}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n}}$

10^n倍すると

$\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}\cdot 10^{n}$

$=10^{n}+k\cdot 5^{n-1}\cdot 10+5^{n}$

つまり一の位の数字が5になるので

$\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$は小数第$n$位の数字が5になる有限小数で表せる.

(ii) bは偶数だが4の倍数でないとき ($b=2g$ (gは奇数)とおく)

$a_n=2^{n-1}$ $(n\geqq 3)$

とすると

$\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$

$=\dfrac{2^{n-1}(2^{n-1}+2g)}{2^{2n}}$

$=\dfrac{2^{n-2}+g}{2^{n}}$ $\quad g=2l+1$ (lは整数)

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{l}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^{n}}$

10^n倍すると

$\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}\cdot 10^{n}$

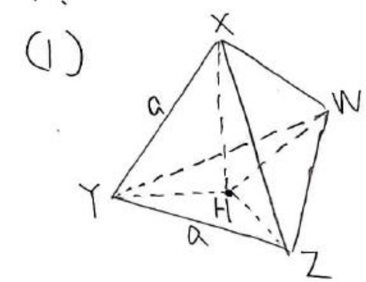
$=25\cdot 10^{n-2}+l\cdot 5^{n-1}\cdot 10+5^{n}$

$n\geqq 3$より一の位が5になるので

$\dfrac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$は小数第$n$位の数字が5になる有限小数で表せる.

4.

(1)



上のような正四面体を考えHはXから△YZWにおろした垂線の足とする. △XYH≡△XZH≡△XWHよりYH=ZH=WHとなるので

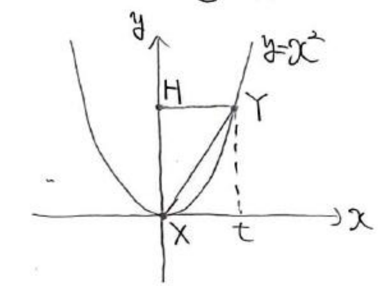
Hは△YZWの外心. 正弦定理より

$\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=2YH$

$\therefore YH=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\therefore XH=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$



$y=x^2$の回転体でxy平面上に4つの頂点のうちの2つが上の図のようにおくことを考える. (この場合X=0). 図より

$YH^2=XH$

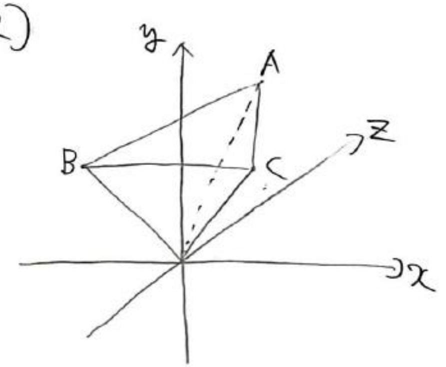
より

$\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

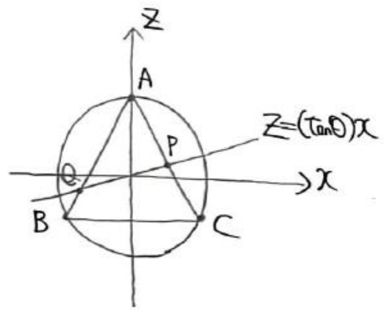
$\therefore a=\sqrt{6}$

これより正四面体OABCの半径は$\sqrt{6}$ //

(2)



正四面体の高さは $\frac{\sqrt{6}}{3}a = 2$ より、平面 $y=2$ 上の A, B, C を



$A(0, 2, \sqrt{2})$
$B\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$C\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

と設定し，$\triangle ABC$ と $z=(\tan\theta)x$ との交点を考える．この直線と線分AC, ABとが交わるときを考えれば十分なので

$$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}$$

とする．

$z=(\tan\theta)x$ と線分AC すなわち $z=-\sqrt{3}x+\sqrt{2}$ との交点Pは

$$(\tan\theta)x = -\sqrt{3}x+\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (\tan\theta+\sqrt{3})x = \sqrt{2}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{\tan\theta+\sqrt{3}}$$

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{\tan\theta+\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}\tan\theta}{\tan\theta+\sqrt{3}}\right)$$

$z=(\tan\theta)x$ と線分AB すなわち $z=\sqrt{3}x+\sqrt{2}$ との交点Qは

$$(\tan\theta)x = \sqrt{3}x+\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{\tan\theta-\sqrt{3}}$$

$$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\tan\theta-\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}\tan\theta}{\tan\theta-\sqrt{3}}\right)$$

PQ

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{\tan\theta+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\tan\theta-\sqrt{3}}\right)^2 (1+\tan^2\theta)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-2\sqrt{6}}{\tan^2\theta-3}\right)^2}\sqrt{1+\tan^2\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{24}{(\tan^2\theta-3)^2}}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{|\tan^2\theta-3|} \cdot \left|\frac{1}{\cos\theta}\right|$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3-\tan^2\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3-\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)} \times \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{4-\frac{1}{\cos^2\theta}} \times \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}\cos\theta}{4\cos^2\theta-1}$$

$\cos\theta = u$ とおく

$$= \frac{2\sqrt{6}u}{4u^2-1}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq u \leqq 1\right)$$

$$\frac{dPQ}{du} = \frac{2\sqrt{6}(4u^2-1) - 2\sqrt{6}u \cdot 8u}{(4u^2-1)^2}$$

$$= \frac{-8\sqrt{6}u^2 - 2\sqrt{6}}{(4u^2-1)^2} < 0$$

PQは単調減少より $u=1$ のとき最小をとる（このとき $\theta=0$）．

求める切り口の面積の最小値は

$$\frac{2\sqrt{6}}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$ //