2019 東海大(医) 2/2 1日目

$\boxed{1}$

(1)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\frac{1}{\cos\theta}-1}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\theta^2\cos\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=\underline{\frac{1}{2}}_{/\!/}$$

(2) $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z^2-\sqrt{3}z+1=0$

$\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}$

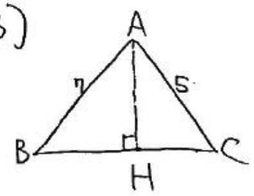
$=\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$

$z^{20}+\frac{1}{z^{20}}$

$=\cos\left(\pm\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{10}{3}\pi\right)$
$+\cos\left(\mp\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(\mp\frac{10}{3}\pi\right)$

$=2\cos\frac{10}{3}\pi=\underline{-1}_{/\!/}$

(3)



(余) $\cos A=\frac{49+25-64}{2\cdot7\cdot5}=\frac{1}{7}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot7\cdot5\cdot\sin A$

$=\frac{35}{2}\cdot\frac{\sqrt{48}}{7}$

$=10\sqrt{3}=8\times AH\times\frac{1}{2}$

$\therefore AH=\underline{\frac{5\sqrt{3}}{2}}_{/\!/}$

(4)

$f(x)=\int_x^{x^2}\underbrace{\frac{t}{\log t}}_{g(t)}dt$

$=G(x^2)-G(x)$

$f'(x)=2xg(x^2)-g(x)$

$f'(\sqrt{e})=2\sqrt{e}g(e)-g(\sqrt{e})$

$=2e\sqrt{e}-2\sqrt{e}$

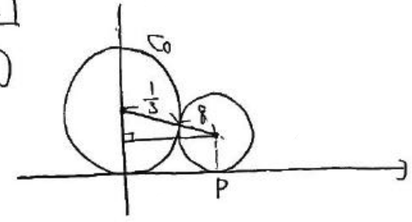
$=\underline{(2e-1)\sqrt{e}}_{/\!/}$

(5) $\underline{a,c,e}_{/\!/}$

※平成27年はAとEで迷いそうですが、a_1の値を考えれば明白.

$\boxed{2}$

(1)



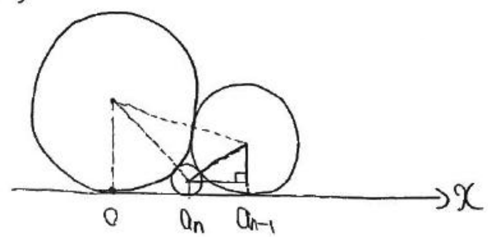
(三平方)

$p^2+\left(\frac{1}{3}-q\right)^2=\left(\frac{1}{3}+q\right)^2$

$\Leftrightarrow p^2-\frac{2}{3}q=\frac{2}{3}q$

$\Leftrightarrow p^2=\frac{4}{3}q\quad\therefore \underline{q=\frac{3}{4}p^2}_{/\!/}$

(2)



C_nの半径をr_nとおく.

OとC_{n-1}の関係は(1)より

$r_{n-1}=\frac{3}{4}a_{n-1}^2$

上の直角三角形で三平方の定理より

$(a_{n-1}-a_n)^2+(r_{n-1}-r_n)^2=(r_n+r_{n-1})^2$

$\Leftrightarrow (a_{n-1}-a_n)^2=4r_nr_{n-1}=\frac{9}{4}a_n^2a_{n-1}^2$

$\therefore (a_n-a_{n+1})^2=\underline{\frac{9}{4}a_{n+1}^2a_n^2}_{/\!/}$

$a_n-a_{n+1}>0$ より

$a_n-a_{n+1}=\frac{3}{2}a_{n+1}a_n$

$\Leftrightarrow a_n=\left(\frac{3}{2}a_n+1\right)a_{n+1}$

$\Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{a_n}{\frac{3}{2}a_n+1}$

$\therefore \underline{a_{n+1}=\frac{2a_n}{3a_n+2}}_{/\!/}$

逆数とると

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+2}{2a_n}$

$=\frac{1}{a_n}+\frac{3}{2}$

$\downarrow b_n=\frac{1}{a_n}$

$b_{n+1}=\underline{b_n+\frac{3}{2}}_{/\!/}$

一般項 $b_n=1+(n-1)\frac{3}{2}$

$=\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}$

$=\frac{3n-1}{2}$

$\therefore \underline{a_n=\frac{2}{3n-1}}_{/\!/}$

(3) $S_n=r_n^2\pi$

$=\left(\frac{3}{4}a_n^2\right)^2\pi$

$=\underline{\frac{9\pi}{(3n-1)^4}}_{/\!/}$

$\lim_{n\to\infty}n^4S_n$

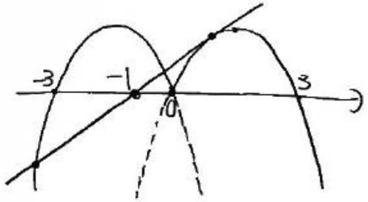
$=\frac{9\pi}{3^4}$

$=\underline{\frac{\pi}{9}}_{/\!/}$

$\boxed{3}$

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+3x & (x\geqq 0)\\ -x^2-3x & (x<0)\end{cases}$$

(1)(2)(3)



x軸との交点 $\underline{3コ}$

C_2はaの値によらず $\underline{(-1,0)}$ を通る

$f(x)$と$g(x)$の共有点が3コのときは上のように，接するとき．

このとき

$-x^2+3x=a(x+1)$

$\Leftrightarrow 0=x^2+(a-3)x+a$

$D=(a-3)^2-4a$

$=a^2-10a+9=0$

$\therefore\ a=1$

($a=9$だと交点のx座標が-3でNG)

これより

C_1とC_2の共有点が2コ … $\underline{a>1}$

〃 3コ … $\underline{a=1}$

〃 4コ … $\underline{0<a<1}$

(4) C_1とC_2が接するとき $a=1$.

そのとき 接点 $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$.

他は

$-x^2-3x=x+1$

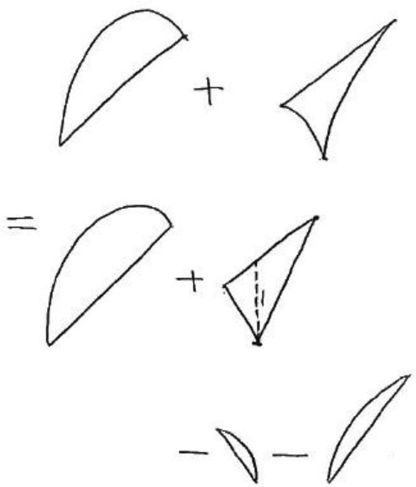
$\Leftrightarrow 0=x^2+4x+1$

$\Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{3}$

つまり共有点のx座標は小さい順に

$\underline{-2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3},\ 1}$

C_1とC_2で囲まれた面積は



$$=\frac{1}{6}\{-2+\sqrt{3}-(-2-\sqrt{3})\}^3+1\cdot(3-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{6}(2-\sqrt{3})^3-\frac{1}{6}\cdot 1^3$$

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{3})^3+\frac{3-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6}(8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3})-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 24\sqrt{3}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6}(26-15\sqrt{3})-\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}(39\sqrt{3}-27)+\frac{9-3\sqrt{3}}{6}$$

$$=\underline{6\sqrt{3}-3}$$