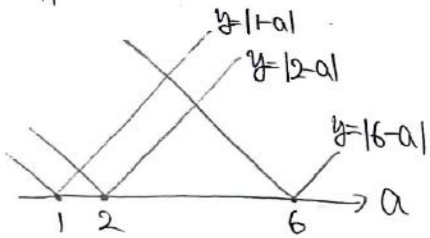
2019 聖マリアンナ医科大

1

(1)

$f'(a)$
$= \frac{1}{3}\{2(a-1)+2(a-2)+2(a-6)\}$
$= \frac{2}{3}(3a-9)$

$\underline{a=3}$ で $f(a)$ の極小値かつ最小値とる.



$a<1$ または $6<a$ のとき $g(a)$ は最小をとらない. $1 \leqq a \leqq 6$ のとき $|1-a|+|6-a|=5$ なので この範囲内で $g(a)$ を最小にするのは $\underline{a=2}$ のとき

(2) 解と係数の関係より

$$\begin{cases} 2p+q=-a \\ p^2+2pq=b \\ p^2q=b \end{cases}$$

$\therefore q>0$
$\therefore q \geqq 1$

$p^2+2pq=p^2q$
$\iff 0=pq-p-2q$
$\iff 2=(p-2)\underbrace{(q-1)}_{\geqq 0}$

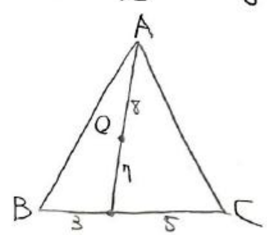
$(p-2, q-1)=(2,1),(1,2)$
$\therefore (p,q)=\underline{(4,2)}, \underbrace{(3,3)}_{3重解でNG}$

(3)

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$
$= \left[x\tan x + \log|\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$
$= \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + \log\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \log\frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \underline{\frac{4\sqrt{3}-3}{12}\pi - \frac{1}{2}\log 2}$

(4)

$-7\vec{AO}+5(\vec{AB}-\vec{AO})+3(\vec{AC}-\vec{AO})=\vec{0}$
$\iff -15\vec{AO}=-5\vec{AB}-3\vec{AC}$
$\iff \vec{AO}=\frac{8}{15}\cdot\frac{5\vec{AB}+3\vec{AC}}{8}$



$\triangle OBC = \frac{7}{15}\triangle ABC = \underline{14}$

2

(1) $tx-y=0$ と $(1,0),(0,1),(a,b)$ との距離 d_1, d_2, d_3 は

$d_1^2=\frac{t^2}{t^2+1}$

$d_2^2=\frac{1}{t^2+1}$

$d_3^2=\frac{(at-b)^2}{t^2+1}$

$\therefore f(t)=1+\frac{(at-b)^2}{t^2+1}$

$f(0)=\underline{1+b^2}$ $\quad \lim_{t\to\infty} f(t)=\underline{1+a^2}$

(2)

$f'(t)=\frac{2(at-b)a(t^2+1)-(at-b)^2 2t}{(t^2+1)^2}$
$=\frac{2(at-b)\{at^2+a-(at^2-bt)\}}{(t^2+1)^2}$
$=\frac{2(at-b)(a+bt)}{(t^2+1)^2}$

$f'(t)=0 \iff t=\underline{-\frac{a}{b}, \frac{b}{a}}$

(3)

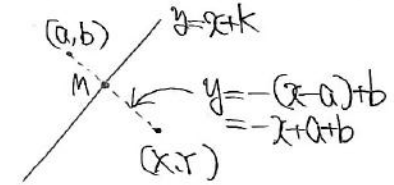
t	$\cdots$	$-\frac{a}{b}$	$\cdots$	$\frac{b}{a}$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$	1	$\nearrow$

$f(-\frac{a}{b})=1+\frac{(-\frac{a^2}{b}-b)^2}{\frac{a^2}{b^2}+1}$
$=1+\frac{(-a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}$
$=1+a^2+b^2$

$\underline{t=-\frac{a}{b}}$ のとき最大値 $1+a^2+b^2$
$\underline{t=\frac{b}{a}}$ のとき最小値 1

3

(1) 点 (x,y) を点 (a,b) に変える.



Mは
$-x+a+b=x+k$
$\iff a+b-k=2x$
$\therefore M\left(\frac{a+b-k}{2}, \frac{a+b+k}{2}\right)$

これより
$\frac{a+X}{2}=\frac{a+b-k}{2}, \frac{b+Y}{2}=\frac{a+b+k}{2}$

$$\because \begin{cases} X = b - k \\ Y = a + k \end{cases} \iff \begin{cases} a = Y - k \\ b = X + k \end{cases}$$

(a, b) は C 上にあるので

$$C_1 : (X+k)^2 + \frac{(Y-k)^2}{4} = 1$$

小文字に戻すと

$$C_1 : (x+k)^2 + \frac{(y-k)^2}{4} = 1$$

(2)

C と C_1 の共有点の個数は C と $y = x + k$ の共有点の個数と同じ、連立すると

$$\frac{x^2}{4} + (x+k)^2 = 1$$

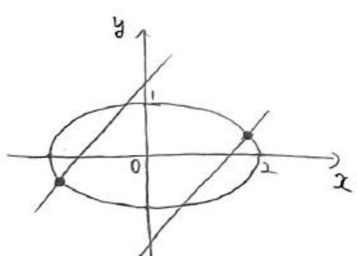
$$\iff 5x^2 + 8kx + 4k^2 - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 16k^2 - 5(4k^2 - 4)$$

$$= -4(k^2 - 5) = 0$$

であればいいので $k = \pm\sqrt{5}$

(3)



C の法線の傾きが1になるときを調べる。$(2\cos\theta, \sin\theta)$ での接線は

$$\frac{(2\cos\theta)x}{4} + (\sin\theta)y = 1$$

これの法線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{2} \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

傾きが1より $\frac{\cos\theta}{2} = \sin\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると

$$\frac{5}{4}\cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos\theta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

法線の傾きが1になる接点は

$$\left(\pm\frac{4}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$y = x + k$ がこの点を通るとき

$$\pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{4}{\sqrt{5}} + k$$

$$\therefore k = \mp\frac{3}{\sqrt{5}}$$

このとき C と C_1 の共有点の個数が変わる境界である。

$-\frac{3}{\sqrt{5}} < k < \frac{3}{\sqrt{5}}$ のとき共有点4コもつ。

$\boxed{4}$

(1)

(i) $n = 1$ のとき

$$1^3 = \left\{\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 2\right\}^2$$

より与式は成立。

(ii) $n = k$ のとき与式が成り立つとすると

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$$

$n = k+1$ のとき

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3$$

$$= \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2 + (k+1)^3$$

$$= \left(\frac{1}{4}k^2 + k + 1\right)(k+1)^2$$

$$= \frac{1}{4}(k^2 + 4k + 4)(k+1)^2$$

$$= \left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}^2$$

よりこのときも成立。

(i)(ii)よりすべての自然数 n において与式が成立。

(2)

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5 - k^5\}$$

$$= (2^5 - 1^5) + (3^5 - 2^5) + \cdots + \{(n+1)^5 - n^5\}$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n$$

一方で

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5 - k^5\}$$

$$= 5\sum_{k=1}^{n}k^4 + 10\sum_{k=1}^{n}k^3 + 10\sum_{k=1}^{n}k^2 + 5\sum_{k=1}^{n}k$$

以上より

$$5\sum_{k=1}^{n}k^4$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - 10\sum_{k=1}^{n}k^3 - 10\sum_{k=1}^{n}k^2 - 5\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}k^4$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n - 2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - 2\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\} - 5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

より $\sum_{k=1}^{n}k^4$ は n の5次式で表される。

(3)

(i) $d = 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

より $\sum_{k=1}^{n}k^d$ は n の $d+1$ 次式として表せる。

(ii) $d=m$ のとき成り立つとすると

$$\sum_{k=1}^{n} k^{d}$$

はnの$d+1$次式で表せる.

$d=m+1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^{m+2}-k^{m+2}\}$$

$$=2^{m+2}-1^{m+2}+3^{m+2}-2^{m+2}+\cdots+(n+1)^{m+2}-n^{m+2}$$

$$=(n+1)^{m+2}-1$$

また

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^{m+2}-k^{m+2}\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{{}_{m+2}C_1 k^{m+1}+{}_{m+2}C_2 k^{n}+\cdots+{}_{m+2}C_{m+2}\}$$

$$={}_{m+2}C_1\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}+{}_{m+2}C_2\sum_{k=1}^{n}k^{m}+\cdots+n$$

以上より

$${}_{m+2}C_1\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}$$

$$=(n+1)^{m+2}-1-{}_{m+2}C_2\sum_{k=1}^{n}k^{m}-{}_{m+2}C_3\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}-\cdots-n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}k^{m+1}$$

$$=\frac{1}{m+2}\left\{(n+1)^{m+2}-1-{}_{m+2}C_2\sum_{k=1}^{n}k^{m}-{}_{m+2}C_3\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}-\cdots-n\right\}$$

以上より $\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}$ はnの$m+2$次式で表せる.

(i)(ii)よりすべての自然数dにおいて $\sum_{k=1}^{n}k^{d}$ はnの$d+1$次式で表せる.