2019 杏林大(医)

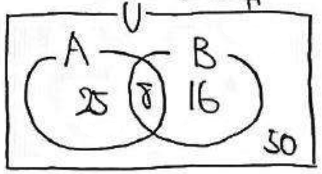
I

(1)

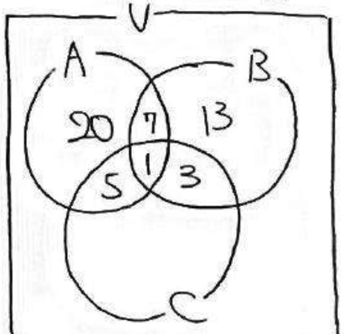
$n(A\cap B)$

$= n(100$未満で12の倍数$) = \underline{8}$

$n(\overline{A\cup B}) = \underline{50}$



$n(A\cap B\cap C) = \underline{1}$



$n((A\cup B)\cap\overline{C}) = 20+7+13 = \underline{40}$

(2)

$n(X$が3の倍数$)$

$= 1\cdot4\cdot3 = \underline{12}$

$n(X$が賞品受けとる$)$

$= n(X$が最小$) + n(X$が真ん中$)$

$= 1\cdot2 + 1\cdot2\cdot2\cdot2 = \underline{10}$

$P(X$が3以下$\cap$賞品受けとる$)$

$= P(X$が$3\cap$賞品受けとる$)$

$+P(X$が$2\cap$ 〃 $)$

$+P(X$が$1\cap$ 〃 $)$

$$= \frac{10}{{}_5P_3} + \frac{{}_3P_2 + 1\cdot1\cdot3\cdot2}{{}_5P_3} + \frac{{}_4P_2}{{}_5P_3}$$

$$= \frac{10+12+12}{60}$$

$$= \underline{\frac{17}{30}}$$

$P(X$が2以上$\cap Z$が賞品$)$

$= P(X$が2以上$)$

$\quad -P(X$が2以上$\cap Z$が賞品もらえない$)$

$= \frac{4}{5} - P(X$が2以上$\cap X$とYが賞品$)$

$= \frac{4}{5} - P(X$が2以上$\cap X$が最小、Yが真ん中$)$

$\quad -P(X$が2以上$\cap X$が真ん中、Yが最小$)$

$$= \frac{4}{5} - \frac{4}{60} - \frac{10}{60}$$

X	Y	Z
3	4	5
2	3	4
	3	5
	4	5

X	Y	Z
4	1	5
	2	5
	3	5
3	1	5
	1	4
	2	5
	2	4
2	1	5
	1	4
	1	3

$$= \underline{\frac{17}{30}}$$

$P_{X\text{が}1\text{でない}}(Z$が賞品$)$

$$= \frac{P(X\text{が}1\text{でない}\cap Z\text{が賞品})}{P(X\text{が}1\text{でない})}$$

$$= \frac{P(X\text{が}2\text{以上}\cap Z\text{が賞品})}{P(X\text{が}2\text{以上})}$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{17}{30} = \underline{\frac{17}{24}}$$

II

(a) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{2x^2+1-x\cdot4x}{(2x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1-2x^2}{(2x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(2x^2+1)^2-(1-2x^2)2(2x^2+1)4x}{(2x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-4x(2x^2+1)-8x(1-2x^2)}{(2x^2+1)^3}$$

$$= \frac{8x^3-12x}{(2x^2+1)^3}$$

$$= \frac{4x(2x^2-3)}{(2x^2+1)^3}$$

$x = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ のとき 極大値 $\underline{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

変曲点は $\underline{3}$ つもつ.

この中で最大なのは $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ のとき

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{3+1} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

$$\therefore \underline{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{8}\right)}$$

(b) Pにおける接線は

$$y = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{4}}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{9}x - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$$

$$= \underline{\frac{2}{9}x + \frac{2}{9}}$$

$$\frac{x}{2x^2+1} = \frac{2}{9}(x+1)$$

$\Leftrightarrow 9x = (2x+2)(2x^2+1)$

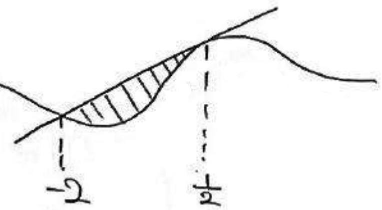
$\Leftrightarrow 0 = 4x^3+4x^2-7x+2$

$\Leftrightarrow 0 = (2x-1)(2x^2+3x-2)$

$\Leftrightarrow 0 = (2x-1)(2x-1)(x+2)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, -2$

もう1つの交点 $\underline{(-2, -\frac{2}{9})}$ //



(面積)

$= \int_{-2}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{9}(x+1) - \frac{x}{2x^2+1} \right\} dx$

$= \left[\frac{1}{9}(x+1)^2 - \frac{1}{4}\log(2x^2+1) \right]_{-2}^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4}\log 9$

$= \frac{5}{36} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{6}$

$= \underline{\frac{5}{36} + \frac{1}{4}\log_e 6}$ //

(c) Pを通る傾き m の直線は

$y = m\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}$

↓ Cと連立

$\frac{x}{2x^2+1} = mx + \frac{1}{3} - \frac{m}{2}$

$\iff x = \left(mx + \frac{1}{3} - \frac{m}{2}\right)(2x^2+1)$

$\iff 0 = 2mx^3 + \left(\frac{2}{3} - m\right)x^2 + (m-1)x + \frac{1}{3} - \frac{m}{2}$

$\iff 0 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2mx^2 + \frac{2}{3}x + m - \frac{2}{3}\right)$

求める条件は

$2mx^2 + \frac{2}{3}x + m - \frac{2}{3} = 0$

の判別式 $D \geqq 0$.

ただし $x = \frac{1}{2}$ で重解を除く.

$D = \frac{4}{9} - 8m\left(m - \frac{2}{3}\right)$

$= -8m^2 + \frac{16}{3}m + \frac{4}{9} \geqq 0$

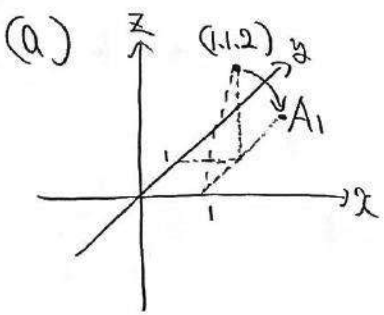
$\iff 18m^2 - 12m - 1 \leqq 0$

$\iff \underline{\frac{2-\sqrt{6}}{6} \leqq m \leqq \frac{2+\sqrt{6}}{6}}$ //

ちなみに $x = \frac{1}{2}$ のとき $m = \frac{2}{9}$ となり $x = \frac{1}{2}$ で重解にはならない.

III

(a)



$a_1 = \underline{\sqrt{5}}$ //

同様に $a_{n+1} = \underline{\sqrt{a_n^2 + 4}}$ //

$\therefore a_{n+1}^2 = a_n^2 + 4$

$\therefore a_n^2 = a_1^2 + (n-1)4$

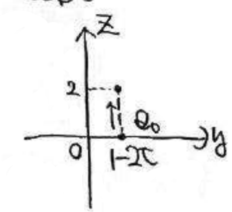
$= 4n+1$

$\therefore a_n = \underline{\sqrt{4n+1}}$ //

(b)

$\overrightarrow{OQ_0} = (1-t)\overrightarrow{OA_0} + t\overrightarrow{OB_0}$

$= \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1-2t \\ 0 \end{pmatrix}$



Q_0 の z を2足して、これと x 軸との距りは

$\sqrt{(1-2t)^2 + 4} = \underline{\sqrt{4t^2 - 4t + 5}}$ //

Q_1 は

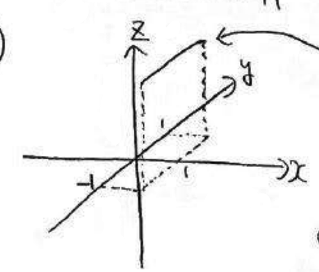
$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = \sqrt{4t^2 - 4t + 5} \end{cases}$

より

$y = \sqrt{x^2 + 4}$

$\therefore \underline{-x^2 + y^2 = 4}$ 上に存在. //

(c)

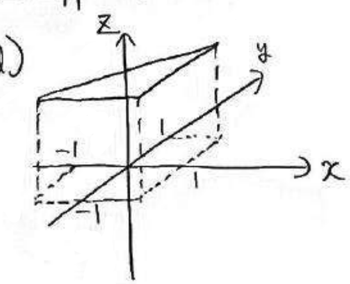


この線分とx軸との距りは $\underline{2}$ //

の最小値は

この線分上の点に対しMを施すと最長の距りが $\sqrt{5}$, 最短が2となるので $\underline{\sqrt{5} - 2}$ の線分となる. //

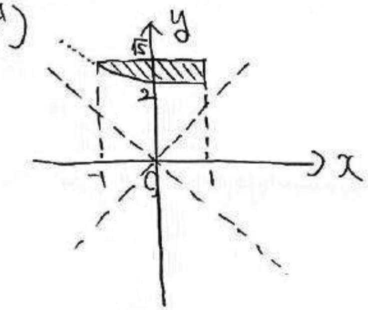
(d)



$0 \leqq x \leqq 1$ までは x 軸からの距りの最長が $\sqrt{5}$ で, 最短が2である.

$-1 \leqq x \leqq 1$ では x 軸からの距りが A_0B_0 を $t : (1-t)$ に内分する点では $\sqrt{4t^2 - 4t + 5}$ となり, xy 平面上では $-x^2 + y^2 = 4 \iff x^2 - y^2 = -4$ に従う. これが最短距り, 最長は $\sqrt{5}$

より



集合Dは上図. $\underline{⑦}$ //

IV

(a)

ア：⑧，イ：⑤，ウ：⑦，エ：②

オ：⑨，カ：⑧

$\boxed{\text{双曲線関数の相互関係}}$

(b)

○ $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

$C=C\times C$

Cは1とすれば真

○ $f(x\times y)=f(x)+f(y)$

$C=2C$

Cは0はとれない

○ $\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2=f(2x)$

$C^2-0^2=C$

Cは1とすれば真

○ $f(f(x))+f(x)=0$

$C+C=0$

Cは0はとれない.

○ $\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2=1$

$C^2-0^2=1$

Cは±1とすれば真.

○ $3f(x)+f'(x)=0$

$3C+0=0$

Cは0はとれない.

つまり $f(x)=C$ とすると真になる命題は

$\underline{3つ存在}_{//}$

上の3つの命題は逆が真とはいえない.

つまり

(i) $f(x\times y)=f(x)+f(y)\Rightarrow f(x)=\log x$

(ii) $f(f(x))+f(x)=0\Rightarrow f(x)=-x$

(iii) $3f(x)+f'(x)=0\Rightarrow f(x)=e^{-3x}$

の3つの命題を考える.

(i)は他の対数関数が反例になる.

(iii)は $f(x)=7e^{-3x}$ 等が反例に

(ii)は $f(f(x))=-f(x)$

となり $f(x)=t$ とおけば

$f(t)=-t$ となり (ii)は逆も

真と言える. つまり $\underline{1つ}_{//}$

(c)

$\lim_{x\to+0} f(x+y)=f(0+y)=f(y)$

また

$\lim_{x\to+0} f(x+y)=\lim_{x\to+0}\{f(x)\times f(y)\}$

$=f(y)\cdot\lim_{x\to+0} f(x)$

$\therefore \underline{\lim_{x\to+0} f(x)=1}_{//}$

$\lim_{x\to1} f(x\times y)=f(y)$

また

$\lim_{x\to1} f(x\times y)=\lim_{x\to1}\{f(x)+f(y)\}$

$=\lim_{x\to1} f(x)+f(y)$

$\therefore \underline{\lim_{x\to1} f(x)=0}_{//}$