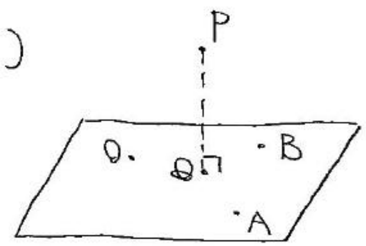
2019 北海道大（理系）

$\boxed{1}$

(1)



$\alpha: z = ax + by$ とおく.

$\downarrow$ A, B通る

$$\begin{cases} 0 = -a + 2b \\ 1 = 2a - 2b \end{cases}$$

$\therefore a = 1,\ b = \frac{1}{2}$.

$\alpha: x + \frac{1}{2}y - z = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 2z = 0$

直線PQ: $\begin{cases} x = p + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

αと連立すると

$2p + 4t - 1 + t - 4 + 4t = 0$

解くと $t = \frac{5}{9} - \frac{2}{9}p$

$\therefore Q\left(\frac{5}{9}p + \frac{10}{9},\ -\frac{2}{9}p - \frac{4}{9},\ \frac{4}{9}p + \frac{8}{9}\right)$ //

(2)

Qが△OABの周および内部にあるとき

$\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OB}$

$= \begin{pmatrix} -s + 2u \\ 2s - 2u \\ u \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} s \geqq 0 \\ u \geqq 0 \\ s + t \leqq 1 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$$\begin{cases} -s + 2u = \frac{5}{9}p + \frac{10}{9} \\ 2s - 2u = -\frac{2}{9}p - \frac{4}{9} \\ u = \frac{4}{9}p + \frac{8}{9} \end{cases}$$

$\downarrow$

$$\begin{cases} s = \frac{1}{3}p + \frac{2}{3} \geqq 0 \\ u = \frac{4}{9}p + \frac{8}{9} \geqq 0 \\ s + t = \frac{7}{9}p + \frac{14}{9} \leqq 1 \end{cases}$$

これを解くと

$-2 \leqq p \leqq -\frac{5}{7}$ //

$\boxed{2}$

(1) $a_n = n(n+1)$

$a_{n+3} = (n+3)(n+4)$

a_n, a_{n+3} ともに連続する2つの自然数の積より, どちらとも偶数であるので d_nも偶数.

(2) 以下8を法とする合同式とする.

a_nが8で割り切れるのは $n \equiv 0$ または $n \equiv 7$ のとき.

(i) $n \equiv 0$ のとき

$a_{n+3} \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv 4$

(ii) $n \equiv 7$ のとき

$a_{n+3} \equiv 10 \cdot 11 \equiv 6$

つまり a_{n+3}はこのとき8で割り切れない. よってd_nは8で割り切れない.

(3)

pを5以上の素数とする.

a_nがpの倍数のとき nまたはn+1がpの倍数である. どちらがpの倍数つまりpk（kは整数）だったとしても

$n + 4 < p(k+1)$ （$\because p \geqq 5$）

になるので a_{n+3}はpで割り切れない.

(4)

a_nが4で割り切れるのは

$n \equiv 0$ または $n \equiv 3 \pmod 4$.

(i) $n \equiv 0 \pmod 4$ のとき

$a_{n+3} \equiv 12 \equiv 0 \pmod 4$

(ii) $n \equiv 3 \pmod 4$ のとき

$a_{n+3} \equiv 6 \cdot 7 \equiv 2 \pmod 4$

つまり d_nは偶数だが 4で割れるのは $n \equiv 0 \pmod 4$ のとき.

a_nが3で割り切れるのは

$n \equiv 0$ または $n \equiv 2 \pmod 3$.

(i) $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$a_{n+3} \equiv 12 \equiv 0 \pmod 3$

(ii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$a_{n+3} \equiv 30 \equiv 0$

つまりこのとき a_{n+3}も3で割り切れるのでd_nも3で割り切れる.

(3)も考慮し, $d_n \leqq 12$が言える.

$d_n = 12$となるnは$\underline{12}$ //

3

$$f(x)=\frac{x+t}{x(1-tx)}$$

(1)

$$f'(x)=\frac{x(1-tx)-(x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2}$$

$$=\frac{tx^2-t+2t^2x}{x^2(1-tx)^2}$$

$g(x)=tx^2+2t^2x-t=0$

の判別式 D とすると

$$\frac{D}{4}=t^4+t^2>0$$

つまり $f'(x)$ の符号変化が2回起こるので極大値と極小値を1つずつもつ.

(2) $M(X,Y)$ とおく.

$\alpha+\beta=-2t$

$\alpha\beta=-1$

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=-t$$

Y

$$=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

$$=\frac{\alpha+t}{2\alpha(1-t\alpha)}+\frac{\beta+t}{2\beta(1-t\beta)}$$

$$=\frac{(\alpha+t)(\beta-t\beta^2)+(\beta+t)(\alpha-t\alpha^2)}{2\alpha\beta(1-t\alpha)(1-t\beta)}$$

$$=\frac{2\alpha\beta+t(\alpha+\beta-\alpha\beta^2-\alpha^2\beta)-t^2(\alpha^2+\beta^2)}{-2(1-t(\alpha+\beta)+t^2\alpha\beta)}$$

$$=\frac{-2+t(-2t-2t)-t^2(4t^2+2)}{-2(1+2t^2-t^2)}$$

$$=\frac{-2-4t^2-4t^4-2t^2}{-2t^2-2}$$

$$=\frac{-4t^4-6t^2-2}{-2t^2-2}$$

$$=\frac{2t^4+3t^2+1}{t^2+1}$$

$$=2t^2+1$$

求める軌跡は

放物線 $y=2x^2+1\ (-1<x<0)$

4

(1)

P(Bの得点がm)

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{n} & (m\leqq 2)\\[2mm] \dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{n} & (m\geqq 3)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{n^2} & (m\leqq 2)\\[2mm] \dfrac{n+2}{n^2} & (m\geqq 3)\end{cases}$$

(2)

P(Aの得点がm未満)

$$=\frac{m-1}{n}$$

P_n

$$=\sum_{m=1}^{2}\frac{m-1}{n}\cdot\frac{2}{n^2}+\sum_{m=3}^{n}\frac{m-1}{n}\cdot\frac{n+2}{n^2}$$

$$=\frac{2}{n^3}\sum_{m=1}^{2}(m-1)+\frac{n+2}{n^3}\sum_{m=3}^{n}(m-1)$$

$$=\frac{2}{n^3}+\frac{n+2}{n^3}(2+3+\cdots+(n-1))$$

$$=\frac{2}{n^3}+\frac{n+2}{n^3}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n-1\right\}$$

$$=\frac{(n+2)(n-1)}{2n^2}-\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{n^2+n-2-2}{2n^2}=\frac{n^2+n-4}{2n^2}$$

5

(1)

$f_{n+1}(x)$

$$=2\cos x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_n(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)\,dt$$

$$=2\cos x+b_n\sin x-a_n\cos x$$

$$=b_n\sin x+(2-a_n)\cos x$$

a_{n+1}

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\{b_n\sin t+(2-a_n)\cos t\}\sin t\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{b_n(1-\cos 2t)+(2-a_n)\sin 2t\}\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[b_nt-\frac{b_n}{2}\sin 2t-\frac{2-a_n}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}b_n\cdot\pi=b_n$$

b_{n+1}

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\{b_n \sin t + (2-a_n)\cos t\}\cos t\,dt$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{b_n \sin 2t + (2-a_n)(1+\cos 2t)\}dt$

$= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{b_n}{2}\cos 2t + (2-a_n)t + \frac{2-a_n}{2}\sin 2t\Big]_0^{\pi}$

$= 2-a_n$

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = 2-a_n \end{cases}$$

(2)

$a_{n+2} = 2-a_n$

$\Leftrightarrow a_{n+2} - 1 = -(a_n - 1)$

$\therefore c_{n+2} = -c_n$

◦ nが奇数のとき

$c_n = c_1(-1)^{\frac{n-1}{2}}$

$= (a_1-1)(-1)^{\frac{n-1}{2}}$

◦ nが偶数のとき

$c_n = \underbrace{c_2}_{a_2-1}(-1)^{\frac{n-2}{2}}$

$= (b_1-1)(-1)^{\frac{n-2}{2}}$

(3)

$$a_n = \begin{cases} 1 + (a_1-1)(-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n\text{が奇数}) \\ 1 + (b_1-1)(-1)^{\frac{n-2}{2}} & (n\text{が偶数}) \end{cases}$$

$a_1 = b_1 = 1$であればa_nはnによらない。

$\therefore a_n = 1$、$b_n = 1$、このとき

$f_n(x)$

$= b_{n-1}\sin x + (2-a_{n-1})\cos x$

$= \sin x + \cos x$