2018 東海大医 2/2 (1日目)

**1**

(1)

P(Aで忘れる) P(Bで忘れる)

$= \frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{7}$ $= \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{7}$

$P_{忘れる}$(Aで忘れる)

$$= \frac{\frac{1}{7}+\frac{36}{7^3}}{\frac{1}{7}+\frac{36}{7^3}+\frac{6}{7^2}}$$

$$= \frac{49+36}{49+36+42} = \underline{\frac{85}{127}}_{//}$$

(2)

$y=\frac{1}{2}\cosh 2x$

$y=\sinh 2x$

$\int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$

相互関係、
$\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$

$=\int_0^2 \sqrt{\cosh^2 2x}\,dx$

$=\int_0^2 \cosh 2x\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right]_0^2 = \underline{\frac{e^4-e^{-4}}{4}}_{//}$

(3)

$1800 = 9\cdot 200 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$

(正の約数の逆数の和)

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}\right)$

$=\frac{\cancel{15}^{\,3}}{8}\cdot\frac{13}{\cancel{9}_{\,3}}\cdot\frac{31}{\cancel{25}_{\,5}}$

$=\underline{\frac{403}{120}}_{//}$

(4)

$x^2-x(\log_2 a+\log_2 b)+2\log_2 a\log_2 b=0$

$D=(\log_2 a+\log_2 b)^2-8\log_2 a\log_2 b$

$\quad=(\log_2 a)^2-6\log_2 a\log_2 b+(\log_2 b)^2=0$

$\Leftrightarrow 1-6\log_a b+(\log_a b)^2=0$

$\Leftrightarrow \log_a b = 3\pm\sqrt{8}$

$\quad = \underline{3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}}_{//}$

$\log_a b$が$3-2\sqrt{2}$でも$3+2\sqrt{2}$でもどちらでも

$$\begin{cases}\log_a b+\log_b a=6\\ \log_a b\cdot\log_b a=1\end{cases}$$

よりこれらを解にもつのは

$\underline{x^2-6x+1=0}_{//}$

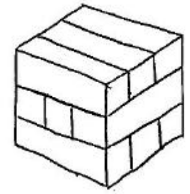
**2**

(1)

$\sum_{i=1}^{k} T(i) = $(すべての積み木)

$= \underline{3n}_{//}$

(2) $n=3$のとき



↓

(i) $T(1)=T(2)=\cdots=T(k-2)=1$

$T(k-1)=3$, $T(k)=2$

のときは $k=6$.

(ii) $T(1)=T(2)=\cdots=T(k-3)=1$

$T(k-2)=2$, $T(k-1)=3$, $T(k)=1$

のときも $k=6$.

$\therefore \underline{4\leqq k\leqq 6}_{//}$

(i), (ii) どちらもMは同じなので (i) で考えると

$M=3n-5+1+1=\underline{3n-3}_{//}$

(3) $n=3$

(i) ① $T(5)=1$のとき

$T(4)=3$, $T(3)=2$

残りの3コを1階と2階に分けるのは2通り.

② $T(5)=2$のとき

$T(4)=3$,

残りの4コを1階から3階に分けるのは3通り)

以上より $2+3=\underline{5通り}_{//}$

$k=6$のときは2通り.

$k=4$のとき

$T(4)=2, T(3)=3, T(2)=T(1)=2$

の1通り. つまり

$J(3)=1+5+2=\underline{8}_{//}$

一般の$J(n)$を考える

① $T(k)=1, T(k-1)=3, T(k-2)=2$

のとき残りの$3n-6$コの積み木でできる場合の数は$F(3n-6)$.

② $T(k)=2, T(k-1)=3, T(k-2)=1$

のとき残りの$3n-6$コの 〃

$F(3n-6)$

③ $T(k)=2, T(k-1)=3, T(k-2)=2$

のとき残りの$3n-7$コの積み木でできる場合の数は$F(3n-7)$

$\therefore J(n)$

$= F(3n-6)+F(3n-6)+F(3n-7)$

$= F(3n-6)+F(3n-5)$

$= \underline{F(3n-4)}$ //

$J(4)=F(8)$, $J(5)=F(11)$.

フィボナッチ数列を書き出すと

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,

なので

$\underline{J(4)=34,\ J(5)=144}$ //

$\boxed{3}$

(1)

$(1+i)^7$

$= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^7$

$= 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

$= \underline{-8-8i}$ //

(2)

$(\sqrt{x}+i)^7$ の虚数部分

$= {}_7C_1(\sqrt{x})^6 i + {}_7C_3(\sqrt{x})^4 i^3$

$+ {}_7C_5(\sqrt{x})^2 i^5 + i^7$

$= 7x^3 i + 35x^2(-i) + 21xi - i$

$\therefore \mathrm{Im}(\sqrt{x}+i)^7$

$= \underline{7x^3-35x^2+21x-1}$ //

(3)

$(\cos\theta+i\sin\theta)^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 7\theta = k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{k}{7}\pi$

$\therefore \underline{\theta = \frac{\pi}{7}, \frac{2}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi} < \frac{\pi}{2}$ //

(4)

$7x^3-35x^2+21x-1=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+i)^7$ の虚部が0

$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^7\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}i\right)^7$ が実数

$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}i\right)^7$ が実数

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} = \cos\frac{k}{7}\pi \quad (k=1,2,3)$

$\downarrow$ 2乗

$\frac{x}{x+1} = \cos^2\frac{k}{7}\pi$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = 1+\tan^2\frac{k}{7}\pi$

$\therefore x = \frac{1}{\tan^2\frac{k}{7}\pi}$

つまり

$7x^3-35x^2+21x-1$

$= \underline{7\left(x-\frac{1}{a^2}\right)\left(x-\frac{1}{b^2}\right)\left(x-\frac{1}{c^2}\right)}$ //

(5)

$\{(\sqrt{x}+i)^{2n+1}$ の $n$ 次の項$\}$

$= {}_{2n+1}C_1(\sqrt{x})^{2n} i$

$(n$ 次の係数$) = \underline{2n+1}$ //

$\{(\sqrt{x}+i)^{2n+1}$ の $(n-1)$ 次の項$\}$

$= {}_{2n+1}C_3(\sqrt{x})^{2n-2}(i)^3$

$((n-1)$ 次の係数$) = -\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3\cdot2\cdot1}$

$= \underline{-\frac{(2n+1)(2n-1)n}{3}}$ //

解と係数の関係より

シ

$= -\frac{サ}{コ}$

$= \underline{\frac{(2n-1)n}{3}}$ //

(6) $\theta = \frac{k}{2n+1}\pi$

とすると

$\frac{1}{\tan^2\frac{k}{2n+1}\pi} < \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2} < \frac{1}{\sin^2\frac{k}{2n+1}\pi}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{\tan^2\frac{k}{2n+1}\pi}$

$< \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{k}{2n+1}\pi}$

$= \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left\{\frac{1}{\tan^2\frac{k}{2n+1}\pi}+1\right\}$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{\tan^2\frac{k}{2n+1}\pi}$

$< \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left\{\frac{1}{\tan^2\frac{k}{2n+1}\pi}+1\right\}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{(2n-1)n}{3} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

$< \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\cdot\frac{(2n-1)n}{3} + \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}n$

上の最左辺と最右辺が $n\to\infty$ で

$\frac{\pi^2}{6}$ に収束するので

$\underline{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$ //