2018 埼玉医科(後期)

1

問1.

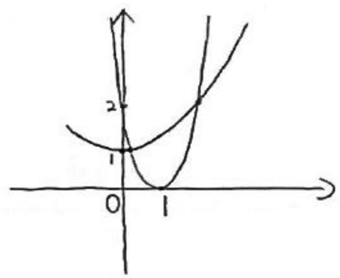
$2(x-1)^2=mx^2+1$

$\Leftrightarrow (2-m)x^2-4x+1=0$

ところで $y=2(x-1)^2$ と $y=mx^2+1$

を書くと，異なる2つの解がともに

正であるには



$m<2$ でなければならない．

そしてこの2つのグラフが交わる

のは $\overbrace{\quad}^{\text{異なる2点で}}$

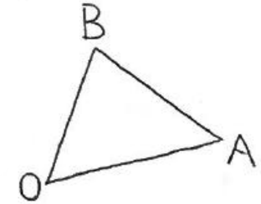
$\frac{D}{4}=(-2)^2-(2-m)$

$=m+2>0$

$\therefore m>-2$

以上より $\underline{-2<m<2}$ //

問2.



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする

$\vec{c}=\pm\overrightarrow{AB}$

$=\vec{a}-\vec{b}$ または $\vec{b}-\vec{a}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\5\\n\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}l-3\\-2-m\\2\end{pmatrix}$

$\underline{l=5,\ m=-7,\ n=2}$ //$\cdots$①

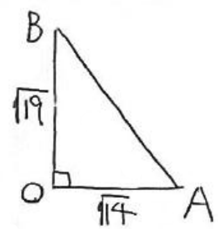
または

$\underline{l=1,\ m=3,\ n=-2}$ //$\cdots$②

①のとき $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ ともに

0にならない．

②のとき $\vec{a}\cdot\vec{b}=3-6+3=0$



$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{14}\cdot\sqrt{19}$

$=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{266}}$ //

問3.

$y=e^{-x}\cos x$

$y'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

$=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$=-\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$y'=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}\pi+(n-1)\pi$ $(n\in\mathbb{N})$

$=\pi n-\frac{\pi}{4}$

極値を与える x は，初項 $\underline{\frac{3}{4}\pi}$ //

公差 $\underline{1\cdot\pi}$ の等差数列．

極値は

$y=e^{-\pi n+\frac{\pi}{4}}\cos\left(\pi n-\frac{\pi}{4}\right)$

$=e^{-\pi n+\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^n$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}(-e^{-\pi})^n$

初項 $\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}}$ //，公比 $\underline{-1\cdot e^{-1\cdot\pi}}$ //

の等比数列．

問4. $2x-3=t$ とおく．

$2dx=dt$

$dx=\frac{1}{2}dt$

$\int_0^1(2x-3)^2e^{2x}dx$

$=\int_{-3}^{-1}t^2e^{t+3}\frac{1}{2}dt$

$=\frac{e^3}{2}\int_{-3}^{-1}t^2e^t\,dt$

$=\frac{e^3}{2}\left[t^2e^t-2te^t+2e^t\right]_{-3}^{-1}$

$\boxed{t^2e^t+2te^t}\boxed{-2te^t-2e^t}\boxed{+2e^t}$

$=\frac{e^3}{2}\{5e^{-1}-(17e^{-3})\}$

$=\underline{\frac{5}{2}e^2-\frac{17}{2}}$ //

2

問1.

$3u+4v=1$

この不定方程式を解くと

$\begin{cases}u=4k-1\\v=-3k+1\end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$

$|uv|$

$=|-12k^2+7k-1|$

$=\left|-12\left(k^2-\frac{7}{12}k\right)-1\right|$

$k=\frac{7}{24}$ に近い $k=0$ で $|uv|$ 最小．

このとき $\underline{u=-1,\ v=1}$ //

$12w+7z=1$

この不定方程式を解くと

$$\begin{cases} w=7l+3 \\ z=-12l-5 \end{cases} \quad (l\in\mathbb{Z})$$

$|wz|$

$=|-84l^2-71l-15|$

$=|-84(l^2+\frac{71}{84}l)-15|$

$l=-\frac{71}{168}$ に近い $l=0$ で $|wz|$ 最小.

このとき $\underline{w=3,\ z=-5}$ //

問2.

$x_1=2$

$x_2=1\cdot3\cdot(-1)+2\cdot4\cdot1=5$

$x_3=4\cdot3\cdot4\cdot3+5\cdot7\cdot(-5)=-31$

(1) $\underset{5}{x_2}$ を $\underset{3}{P_1}$ で割ると余り $\underline{2}$ //

$\underset{4}{P_2}$ で割ると余り $\underline{1}$ //

(2) $\underset{-31}{x_3}$ を $\underset{3}{P_1}, \underset{4}{P_2}, \underset{7}{P_3}$ で割ると

余りは $\underline{2}$ //, $\underline{1}$ //, $\underline{4}$ //

問3 α, β, γ を整数として

$x=3\alpha+2=4\beta+1=7\gamma+4$

$\downarrow$

$3\alpha-4\beta=-1$

$\downarrow$

$$\begin{cases} \alpha=4k_1+1 \\ \beta=3k_1+1 \end{cases} \quad (k_1\in\mathbb{Z})$$

$\downarrow$

$12k_1+5=7\gamma+4$

$\Leftrightarrow 12k_1-7\gamma=-1$

$\downarrow$

$k_1=7k_2-3$

$\gamma=12k_2-5$

$\downarrow$

$x=84k_2-31$

$=84-31=\underline{53}$ // ($\because$ x は正で最小)

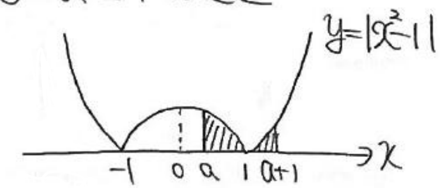
$\boxed{3}$

$f(a)=\int_a^{a+1}\sqrt{(x^2-1)^2}\,dx$

$=\int_a^{a+1}|x^2-1|\,dx$

問1.

$0\leqq a\leqq 1$ のとき



$f(a)$

$=\int_a^1(1-x^2)\,dx+\int_1^{a+1}(x^2-1)\,dx$

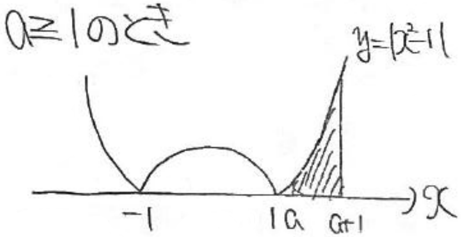
$=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_a^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^{a+1}$

$=\frac{2}{3}\times2-\left(a-\frac{a^3}{3}\right)+\frac{(a+1)^3}{3}-a-1$

$=\frac{1}{3}-2a+\frac{a^3}{3}+\frac{a^3+3a^2+3a+1}{3}$

$=\underline{\frac{2}{3}a^3+1\cdot a^2-1\cdot a+\frac{2}{3}}$ //

$a\geqq1$ のとき



$f(a)$

$=\int_a^{a+1}(x^2-1)\,dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_a^{a+1}$

$=\frac{(a+1)^3}{3}-a-1-\frac{a^3}{3}+a$

$=\underline{1\cdot a^2+1\cdot a-\frac{2}{3}}$ //

問2.

$$f'(a)=\begin{cases} 2a^2+2a-1 & (0\leqq a\leqq 1) \\ 2a+1 & (a\geqq 1) \end{cases}$$

$2a^2+2a-1=0$ をみたす解を α とする. $(0\leqq\alpha\leqq1)$

$\min f(a)=f(\alpha)$

$=\frac{2}{3}\alpha^3+\alpha^2-\alpha+\frac{2}{3}$

			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$2\ 2\ -1$	$\frac{2}{3}$	1	-1	$\frac{2}{3}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$
			-1	$\frac{5}{6}$

$=\underset{0}{(2\alpha^2+2\alpha-1)}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{6}\right)-\alpha+\frac{5}{6}$

$=-\alpha+\frac{5}{6}$

ここで

$2\alpha^2+2\alpha-1=0$

$\alpha=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ $(\alpha>0)$

$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{6}$

$=\underline{\frac{8-3\sqrt{3}}{6}}$ //

$\boxed{4}$

問1.

a	b	c	d	e	f	g
X Y	X X	X X	X Y			

$$
\begin{aligned}
&P(g\text{が}XY)\\
&= P(e\text{が}XX,\ f\text{が}XY)\times\frac{1}{2}\\
&\quad + P(e\text{が}XY,\ f\text{が}XX)\times\frac{1}{2}\\
&\quad + P(e\text{が}XY,\ f\text{が}XY)\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{\boxed{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

問2.(1)

a	b	c	d	e	f	g
X Y	X X	X X	? ?			

まず

$$P(d\text{が}XX) = \frac{1}{16}$$

$$P(d\text{が}XY) = \frac{6}{16}$$

$$P(d\text{が}YY) = \frac{9}{16}$$

より

$$P(f\text{が}XX) = \frac{1}{16}\cdot 1 + \frac{6}{16}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(f\text{が}XY) = \frac{6}{16}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16} = \frac{3}{4}$$

だから

$$
\begin{aligned}
&P(g\text{が}XY)\\
&= P(e\text{が}XX,\ f\text{が}XY)\times\frac{1}{2}\\
&\quad + P(e\text{が}XY,\ f\text{が}XX)\times\frac{1}{2}\\
&\quad + P(e\text{が}XY,\ f\text{が}XY)\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{7}{16}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&P_{g\text{が}XY}(f\text{が}XY)\\
&= \frac{P(g\text{が}XY \cap f\text{が}XY)}{P(g\text{が}XY)}\\
&= \frac{\frac{3}{16}+\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}}\\
&= \frac{6}{7}
\end{aligned}
$$