2018 順天堂大(医)

$\boxed{\text{I}}$

(1)

$(x-2a)^2+(y-a)^2=a^2$

中心 $(2a, a)$ 直線 $y=\underline{\frac{1}{2}}x$ 上

この円と $y=mx \Leftrightarrow mx-y=0$

が接するとき

$\frac{|2ma-a|}{\sqrt{m^2+1}}=a$ ↓ $a>0$

$\Leftrightarrow |2m-1|=\sqrt{m^2+1}$

↓2乗

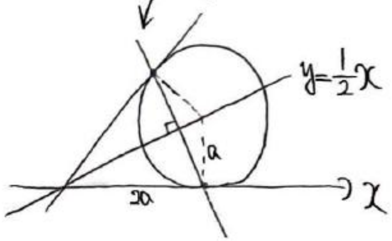
$4m^2-4m+1=m^2+1$

$\Leftrightarrow 3m^2-4m=0$

$\Leftrightarrow m(3m-4)=0$

$\therefore \underline{m=0, \frac{4}{3}}$

(直線ABの傾き) $=\underline{-2}$



トレミーの定理より

$\sqrt{5}a\cdot AB=a\cdot 2a+a\cdot 2a$

$\therefore AB=\frac{4}{\sqrt{5}}a=3$

$\therefore \underline{a=\frac{3\sqrt{5}}{4}}$

(2) 以下11を法とする合同式とする.

(a) $1020\equiv 8$ より

$1020^3\equiv 8^3$

$\equiv 8\cdot 9$

$\equiv \underline{6}$

最大公約数…g
最小公倍数…l とすると

$ab=gl$

$=1020^{13}$

$=1020\,(1020^3)^4$

$\equiv 8\cdot 6^4$

$\equiv 8\cdot 3^2$

$\equiv \underline{6}$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$\equiv 10+2\cdot 6$

$\equiv \underline{0}$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$\equiv 10-2\cdot 6\equiv \underline{9}$

$(a+b)^2\equiv 0 \Rightarrow a+b\equiv 0$

一方で $a-b\equiv 3$ または 8 で $\boxed{\text{探す}}$

(i) $a+b\equiv 0,\ a-b\equiv 3$ のとき

$$\begin{array}{r} a+b\equiv 0 \\ +)\ a-b\equiv 14 \\ \hline 2a\equiv 14 \end{array}$$

$\therefore a\equiv 7 \quad b\equiv 4$

(ii) $a+b\equiv 0,\ a-b\equiv 8$ のとき

$$\begin{array}{r} a+b\equiv 0 \\ +)\ a-b\equiv 8 \\ \hline 2a\equiv 8 \end{array}$$

$\therefore \underline{a\equiv 4} \quad \underline{b\equiv 7}$

小さい順

(3)

$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}+\theta\begin{pmatrix} \cos(\theta-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$

$\underline{a=\frac{-1}{2}}$

$\begin{cases} x(\theta)=\cos\theta+\theta\sin\theta \\ y(\theta)=\sin\theta-\theta\cos\theta \end{cases}$

$x'(\theta)=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta$

$=\theta\cos\theta$

$y'(\theta)=\theta\sin\theta$

$\int_0^{\alpha}\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2}\,d\theta$

$=\int_0^{\alpha}\sqrt{\theta^2}\,d\theta$

$=\int_0^{\alpha}\theta\,d\theta$

$=\frac{1}{2}\alpha^2 \quad b=\underline{\frac{1}{2}} \quad c=\underline{2}$

$\alpha=2\pi$ のとき

$\frac{1}{2}(2\pi)^2=2\pi^2 \quad d=\underline{2},\ f=\underline{2}$

$\boxed{\text{II}}$

(1)

P(2ゲームでAが優勝)

$=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\underline{\frac{1}{9}}$

P(4ゲームでAが優勝)

$=P(ABAA)+P(BAAA)$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3}\cdot 2=\underline{\frac{4}{81}}$

P(6ゲームでAが優勝)

$=P(AB\underline{ABAA})+P(BA\underline{ABAA})$

$+P(AB\underline{BAAA})+P(BA\underline{BAAA})$

$=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$ P(4ゲームでAが優勝)

公比が$\frac{4}{9}$の無限等比級数になるので

$P(\text{Aが優勝}) = \dfrac{\frac{1}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \dfrac{1}{5}$

(2)

$P(A) = \dfrac{1}{3}$

$P(B)\cdot P(\text{(1)でAが優勝})$

これらをたすと

$\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{7}{15}$

次は

$P(A)\cdot P(\text{(1)でAが優勝})$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{15}$

(3)

$P(\text{3ゲーム終了時にAが4})$

$= P(\text{3回中2回Aが勝つ})$

$= {}_3C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$

$P(\text{3ゲーム終了時にAが2})$

$= P(\text{3回中1回Aが勝つ})$

$= {}_3C_1\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

$A=4,\ B=2$からAが優勝する確率をα，

$A=2,\ B=4$　〃　β

とおく

$\alpha = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + 2\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\alpha + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2\beta$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{9}\alpha - \dfrac{4}{9}\beta = \dfrac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 5\alpha - 4\beta = 1$

また

$\beta = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2\alpha + 2\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\beta$

$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{1}{9}\alpha - \dfrac{5}{9}\beta$

$\Leftrightarrow \alpha - 5\beta = 0$

解くと

$\alpha = \dfrac{5}{21}\quad \beta = \dfrac{1}{21}$

$A=3,\ B=3$からAが優勝するのは

$\dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{2}{3}\beta$

$= \dfrac{5}{63} + \dfrac{2}{63} = \dfrac{1}{9}$

(4) 1ゲーム目にAが勝ちかつAが優勝する確率をγとすると

$\gamma = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}P$

$= \dfrac{1}{4}P + \dfrac{1}{4}$

以上より

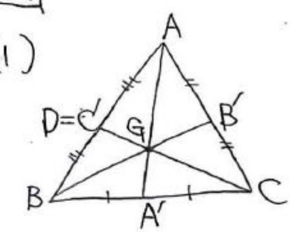
$P = \gamma + \dfrac{1}{2}(1-P)$

$= -\dfrac{1}{4}P + \dfrac{3}{4}$

$\therefore P = \dfrac{3}{5}$

III

(1)



図のように頂点を決める．

メネラウスの定理より

$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{A'G}{GA}\cdot\dfrac{1}{1} = 1$

$\therefore AG : GA' = 2 : 1$

よって

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

$= \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

$= \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$

(2)

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DG}$

$= -\dfrac{1}{2}\vec{b}\cdot\left(\overrightarrow{AG} - \dfrac{1}{2}\vec{b}\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\vec{b}\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$

$= \dfrac{1}{12}|\vec{b}|^2 - \dfrac{1}{6}|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$

(3) GがΔABCの外心であるためには

$\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DG} = 0\\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BG} = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{12}|\vec{b}|^2 - \dfrac{1}{6}|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta = 0\\ \dfrac{1}{12}|\vec{c}|^2 - \dfrac{1}{6}|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta = 0\end{cases}$

辺々引くと

$\dfrac{1}{12}\left(|\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2\right) = 0$

$\therefore |\vec{b}| = |\vec{c}|$

さらに戻すと

$\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{6}\cos\theta = 0$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$ が必要．

逆にこのときΔABCは正三角形になり

$AB \perp CD,\ BC \perp AA',\ CA \perp BB'$

となるのでGは各辺の垂直二等分線になるので重心と外心は一致する．

求める必要十分条件は

ΔABCが正三角形である．