2017 聖マリアンナ

$\boxed{1}$

(1) (与式)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n+n^2+n^3}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$$

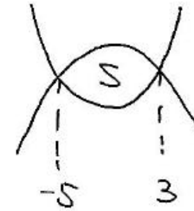
$$=\underline{3}$$ //

(2)

$$\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right)$$
$$\times\left(\cos\left(\frac{13}{18}37\pi\right)+i\sin\left(\frac{13}{18}37\pi\right)\right)$$
$$=\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right)$$
$$\times\left(\cos\left(26\pi+\frac{13}{18}\pi\right)+i\sin\left(26\pi+\frac{13}{18}\pi\right)\right)$$
$$=\cos\frac{9}{18}\pi+i\sin\frac{9}{18}\pi=\underline{i}$$ //

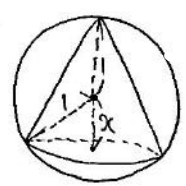
(3)

$$\frac{5}{3}x^2+2x-27=-\frac{4}{3}x^2-4x+18$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+6x-45=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x-15=0$$
$$\therefore x=-5,3$$



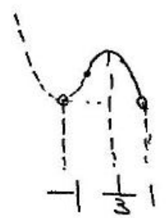
$$S=\int_{-5}^{3}(-3x^2+6x-45)dx$$
$$=-3\left\{-\frac{1}{6}(3+5)^3\right\}$$
$$=\underline{256}$$ //

(4)



$$V=(\sqrt{1-x^2})^2\pi\times(1+x)\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{\pi}{3}(1-x^2)(1+x)$$
$$=\frac{\pi}{3}\underbrace{(-x^3-x^2+x+1)}_{f(x)}$$

$$f'(x)=-3x^2-2x+1$$
$$=-(3x^2+2x-1)$$
$$=-(3x-1)(x+1)$$



$x=\frac{1}{3}$のとき

最大値 $\underline{\frac{32}{81}\pi}$ //

(5)

n(和が5) + n(和が7)

+ n(和が11)

(1,1,1,2) (1,1,1,8)

(1,1,1,4) (1,1,2,7)

(1,1,2,3) (1,1,3,6)

(1,2,2,2) (1,1,4,5)

(1,2,2,6)

(1,2,3,5)

(1,2,4,4)

(1,3,3,4)

(2,2,2,5)

(2,2,3,4)

(2,3,3,3)

$$={}_4C_3\cdot{}_4C_1\times 6_コ+{}_4C_2({}_4C_1)^2\times 8_コ$$
$$+4^4\times 1_コ$$
$$=96+768+256=\underline{1120通り}$$ //

$\boxed{2}$

(1) カ… $\underline{\frac{n-2}{n}}$ //

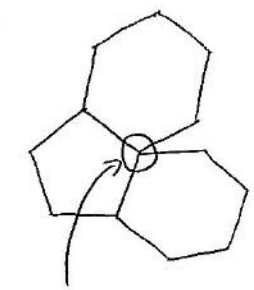
$$\frac{n-2}{n}\times 180^\circ\times m<360^\circ$$
$$\Leftrightarrow (n-2)m<2n$$
$$\Leftrightarrow nm-2n-2m<0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{(n-2)}_{\geq 1}\underbrace{(m-2)}_{\geq 1}<\underline{4}$$ //

(2) nもmも3以上.

$(n-2,m-2)=(1,1),(2,1),(1,2),$
$(1,3),(3,1)$

$(n,m)=(3,3),(4,3),(3,4),$
$(3,5),(5,3)$ //

(3)



1つの頂点に2枚の正六角形があるので、正六角形の頂点の合計は6b コより

$$v=\frac{6b}{2}=\underline{3b}$$ //

正六角形の辺のうち半分は正五角形と接するため、それを全て辺の数としてカウントする. また残り半分の辺は他の正六角形とダブるので

$$e=3b+\frac{3b}{2}=\underline{\frac{9b}{2}}$$ //

1つの頂点に1枚の正五角形があるので

$$v=\underline{5a}$$ //

オイラーの多面体定理より

$v - e + f = 2$

$\Leftrightarrow 3b - \frac{9b}{2} + a + b = 2$

$\Leftrightarrow -\frac{b}{2} + a = 2$

ここで $v = 3b = 5a$ より

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}b + \underbrace{5a}_{3b} = 10$

$\therefore \underline{b = 20}$

$\boxed{3}$

(1) 最小値 10〜15
最大値 40〜45

なので C or e. 中央値は 25〜30

より $\underline{e}$

(2)

$$\overline{x_{都}} = \frac{45 \times \overline{x} - 25 \times \overline{x_{都}}}{20}$$

$\overline{x} = 27$, $\overline{x_{都}} = 24.6$

$= \underline{30.00}$

$$\overline{x^2_{都}} = \frac{45 \times \overline{x^2} - 25 \times \overline{x^2_{都}}}{20}$$

$$= \frac{45 \times (47 + 27^2) - 25 \times (40 + 24.6^2)}{20}$$

$= 939.55$

$s^2_{都} = \overline{x^2_{都}} - (\overline{x_{都}})^2$

$= 939.55 - 900$

$= \underline{39.55}$

(3)
正の相関で都市部のほうが濃度が高いものを選ぶ

$\underline{C}$

(4) B, C, E

$\boxed{4}$

(1)

$f(0+0) = f(0) + f(0)$

$\therefore f(0) = 0$

(2)

$f(1 \cdot 1) = f(1) f(1)$

$\Leftrightarrow f(1)(1 - f(1)) = 0$

$\therefore f(1) = 1 \ (\because f(1) \neq 0)$

(3)

$f(n+1) = f(n) + f(1)$

$= f(n) + 1$

$f(n)$ は初項 $f(1) = 1$, 公差 1 の等差数列(自然数列)より

$f(n) = n$

(4)
正の任意の整数 s に対して

$1 = f(1)$

$= f(s \cdot \frac{1}{s})$

$= f(s) f(\frac{1}{s})$

$= s f(\frac{1}{s})$

$\therefore f(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s} \cdots ①$

正の有理数 q を互いに素な正の整数 α, β を用いて

$q = \frac{\beta}{\alpha}$

とおく

$f(q) = f(\frac{\beta}{\alpha})$

$= f(\beta) f(\frac{1}{\alpha})$

$= \beta \cdot \frac{1}{\alpha} \ (\because ①)$

$= q$

(5)

「$s \neq 0 \Rightarrow f(s) \neq 0$」を示す.

そのために「$f(s) = 0 \Rightarrow s = 0$」を示す. $f(s) = 0$ のとき $s \neq 0$ と仮定すると

$1 = f(1)$

$= f(s \cdot \frac{1}{s})$

$= f(s) f(\frac{1}{s})$

$= 0 \cdot f(\frac{1}{s}) = 0$

となり不適. つまり $s \neq 0$ としたことが誤り. つまり「$f(s) = 0 \Rightarrow s = 0$」が成り立つから「$s \neq 0 \Rightarrow f(s) \neq 0$」も成り立つ $\cdots ②$

任意の正の実数 t に対して

$f(t)$

$= f(\sqrt{t} \cdot \sqrt{t})$

$= \{f(\sqrt{t})\}^2 > 0$ (②より等号は含まない)