2017 埼玉医科(後期)

$\boxed{1}$

問1、

ある候補者…x票

とおく。残りは$1001-x$票で、ある候補者以外で順位付けたとき5位は$\frac{1001-x}{5}$票以下なので、ある候補者がこれを越えればよい。

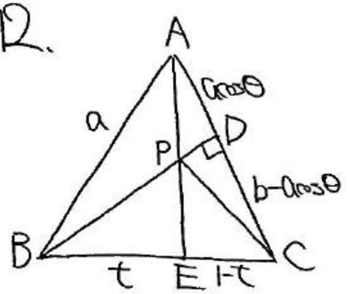
$$x > \frac{1001-x}{5}$$

$\Leftrightarrow 6x > 1001$

$\therefore x \geqq 167 \quad (x \in N)$

最低 $\underline{167}$ 票必要

問2、



$\triangle APB : \triangle APC = 2:1$

$\Leftrightarrow \underbrace{BE}_{t} : \underbrace{EC}_{1-t} = 2:1$

$\therefore \underline{t = \frac{2}{3}}$

$\triangle APB : \triangle BPC = AD : DC$
$= 2:3$

$\Leftrightarrow a\cos\theta : b - a\cos\theta = 2:3$

$\Leftrightarrow 3a\cos\theta = 2b - 2a\cos\theta$

$\Leftrightarrow 5a\cos\theta = 2b$

$\Leftrightarrow \underline{\cos\theta = \frac{2b}{5a}}$

問3

$$(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 2t+5 \\ -t+3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$= 6t+15-4t+12$

$= 2t+27 = 0$

$\therefore \underline{t = -\frac{27}{2}}$

$$\lim_{t\to\infty} \cos\theta(t)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2t+27}{\sqrt{(2t+5)^2+(-t+3)^2}\cdot 5}$$

$$= \frac{2}{5\sqrt{5}} = \underline{\frac{2}{25}\sqrt{5}}$$

問4、

3つの実数解をα, β, γとし、$x^2+px+q=0$と$x^2+qx+p=0$の共通解をαとすると解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \cdots ① \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = a \cdots ② \\ \alpha\beta\gamma = -156 \cdots ③ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -p \cdots ④ \\ \alpha\beta = q \cdots ⑤ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = -q \cdots ⑥ \\ \alpha\gamma = p \cdots ⑦ \end{cases}$$

①,④より

$-p+\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = p$

①,⑥より

$-q+\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = q$

⑦より

$\alpha\gamma = \alpha p = p \quad \therefore \alpha = 1$

改めて①,③より

$$\begin{cases} \beta+\gamma = -1 \\ \beta\gamma = -156 \end{cases}$$

$\beta > \gamma$とすれば$\beta = 12$, $\gamma = -13$

②より

$a = 12 - 156 - 13 = \underline{-157}$

⑦より $\underline{p = -13}$　⑤より $\underline{q = 12}$

$f(x)=0$の解は

$\underline{x = -13, 1, 12}$

$\boxed{2}$ 問1

$$f(x) = 3\sin x + 2\cos 2x + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} f(t)\,dt}_{a}$$

$$= 3\sin x + 2\cos 2x + \frac{a}{2\pi}$$

$$a = \int_0^{\pi}\left(3\sin t + 2\cos 2t + \frac{a}{2\pi}\right)dt$$

$$= \left[-3\cos t + \sin 2t + \frac{a}{2\pi}t\right]_0^{\pi}$$

$$= 3 + \frac{a}{2} - (-3)$$

$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = 6 \quad \therefore \underline{a = 12}$

問2

$f(x)$

$= -4\sin^2 x + 3\sin x + 2 + \frac{6}{\pi}$

$= -4\left(\sin x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{16} + 2 + \frac{6}{\pi}$

$\sin x = -1$ のとき

$\min f(x) = \underline{-5 + \frac{6}{\pi}}$ //

$\boxed{3}$

$\frac{1}{2}n(3n-1) < p \leqq \frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$

問1 $p = 10^4$ のとき

$n(3n-1) < 20000 \leqq (n+1)(3n+2)$

これを満たす $n = 81$.

$\frac{f(p)}{\sqrt{p}} = \frac{81}{100} = \underline{0.81}$ //

問2. $n = f(p)$ とおくと

$\frac{1}{2}f(p)(3f(p)-1) < p \leqq \frac{1}{2}(f(p)+1)(3f(p)+2)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{f(p)}\right) < \frac{p}{f(p)^2} \leqq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{f(p)}\right)\left(3 + \frac{2}{f(p)}\right)$

$\therefore \lim_{p \to \infty} \frac{p}{f(p)^2} = \frac{3}{2}$

$\left(\because \lim_{p \to \infty} f(p) = \infty\right)$

$\therefore \lim_{p \to \infty} \frac{f(p)}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{3}}$ //

$\boxed{4}$

問1.

$P(3回とも白)$

$= P(A \times 3) + P(B \times 3)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$

$= \frac{24 + 60}{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$

$= \frac{21}{2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6} = \underline{\frac{1}{8}}$ //

問2.

$P_{3回とも白}(Bが5)$

$= \frac{P(B \times 3)}{P(3回とも白)}$

$= 8 \cdot \frac{60}{2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$

$= \underline{\frac{5}{7}}$ //

問3.

$P(3回目が白)$

$= P(Aで3回目白) + P(Bで3回目白)$

$= \underset{A}{P}\begin{pmatrix} 赤赤白 \\ 赤白白 \\ 白赤白 \\ 白白白 \end{pmatrix} + \underset{B}{P}\begin{pmatrix} 赤赤白 \\ 赤白白 \\ 白赤白 \\ 白白白 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}\right)$

$+ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}\right)$

$P_{3回目が白}(1回目が白)$

$= \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3}$

$= \frac{4 + 2 + 5 + 5}{4 + 4 + 4 + 2 + \frac{5}{2} + 5 + 5 + 5}$

$= \frac{16}{24 + \frac{5}{2}}$

$= \frac{32}{58 + 5} = \underline{\frac{32}{63}}$ //