

[I]

151. $b_n = \frac{1}{a_n} < 0$.

$b_{n+1} = b_n + 3 \quad b_1 = 2$

$b_n = 3n - 1$

$\therefore a_n = \frac{1}{3n-1}$

152

(5式)

$$= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(3k-1)(3k+2)} - \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 8} \right) + \left(\frac{1}{5 \cdot 8} - \frac{1}{8 \cdot 11} \right) \right.$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{1}{(3n+1)(3n+2)} - \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{10} - \frac{1}{(3n+2)(3n+5)} \right]$$

153

(5式) $= \frac{1}{60}$

[II]

151. $z^2 = -1$

152

$$-z + z^2 - \dots + z^6$$

$$= \frac{-z - z^7(-z)}{1 - (-z)}$$

$$= \frac{-z - 1}{1 + z} = -1$$

153

$$z + \bar{z} = 2 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$= \frac{z - \bar{z}}{2}$$

154

$$z^2 + (\bar{z})^2 = 2 \cos 2\theta$$

$$\therefore \cos 2\theta = \frac{z^2 + (\bar{z})^2}{2} = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2}$$

$$= \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2}$$

155

目標: $\cos 3\theta = \frac{z^3 - \bar{z}^3}{2}$

156

$$\cos \theta \cos 2\theta \cos 3\theta$$

$$= \frac{1}{8} (z - \bar{z})(z^2 - \bar{z}^2)(z^3 - \bar{z}^3)$$

$$= \frac{z}{8} (1 - \bar{z}^2)(1 - \bar{z}^3)(1 - \bar{z})$$

$$= \frac{z}{8} (1 - \bar{z} - \bar{z}^2 - \bar{z})(1 - \bar{z})$$

$$= \frac{z}{8} (1 - \bar{z} - \bar{z}^2 - \bar{z} - \bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^2 + \bar{z}^3 + \bar{z}^3 + \bar{z}^3 + \bar{z}^3)$$

$$= \frac{z}{8} (-\bar{z})$$

$$= -\frac{1}{8}$$

157

(5式)

$$= \frac{z - \bar{z}}{2} + \frac{\bar{z} - z^3}{2} + \frac{z^5 - \bar{z}^2}{2} = \frac{1}{2}$$

[III]

(5式)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - \pi} \left[x^2 \int_{\pi}^x \frac{e^t}{t} dt + \int_{\pi}^x \frac{\sqrt{t} e^t}{t^3} dt \right]$$

ここで左の積分の中身を $f(z)$, 右の積分の中身を $g(z)$ とおき, 原始関数を $F(z), G(z)$ とすると

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left\{ x^2 \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} + \frac{G(x) - G(\pi)}{x - \pi} \right\}$$

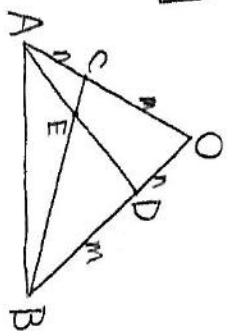
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\pi f(\pi) + g(\pi) \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi e^{\pi}}{\pi \sqrt{\pi}} + \frac{\pi e^{\pi}}{\pi \sqrt{\pi}} \right)$$

$$= \frac{e^{\pi}}{\pi \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{2e^{\pi}}{\pi \sqrt{\pi}}$$

[IV]



[V]

メネラウスの定理より

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1$$

$$\frac{m+n}{n} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{m}{n} = 1$$

$$\therefore CE:EB = n^2:(m+n)n$$

よ)

$$\overline{E} = S \times \frac{1}{m+n} \times \frac{(m+n)m}{n^2 + (m+n)m}$$

$$\therefore \frac{1}{S} = \frac{mn}{m^2 + mn + n^2}$$

例2.

$$m^2 > 0, n^2 > 0 \text{ より}$$

(相加平均) $\geq$ (相乗平均) により

$$m^2 + n^2 \geq 2mn$$

よって

$$\frac{1}{S} \leq \frac{mn}{2mn + mn} = \frac{1}{3}$$

等号成立は $m^2 = n^2 \Leftrightarrow m = n$ のとき

$$\frac{1}{S} = m \text{ とする. このとき}$$

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \neq$$

例3

$$\frac{1}{S} = \frac{\frac{m}{n}}{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + \frac{m}{n} + 1}$$

$$= \frac{t}{t^2 + t + 1} \quad \left(\frac{m}{n} = t \right)$$

$$= f(t)$$

よって

$$f(t) = \frac{1-t}{(t^2+t+1)^2}$$

増減表

t	1/t ... 1 ... 6
f(t)	+ 0 -
f(t)	6/43 $\nearrow$ 1/3 $\searrow$ 6/43

よって最大値をとる t の範囲は

$$(mn) = (1, 6), (6, 1)$$

[VI]

例1 $\triangle PPF$ に余弦定理

$$(PF)^2 = P^2 + (2d)^2 - 2 \cdot 2d \cos \theta$$

$$(2a-P)^2 = P^2 + 4d^2 - 4dP \cos \theta$$

$$4d^2 - 4dP = 4d^2 - 4dP \cos \theta$$

$$d^2 - d^2 = (d - d \cos \theta)P$$

$$\therefore P = \frac{d^2 - d^2}{d - d \cos \theta}$$

同様に

$$P = \frac{b^2 - d^2}{b - d \cos \theta}$$

例2.

$$P = \frac{b^2 - d^2}{b - d \cos \theta} \cdot \frac{d - d \cos \theta}{b - d \cos \theta}$$

$$t = \cos \theta \text{ とする}$$

$$f(t) = \frac{d - d \cos \theta}{b - d \cos \theta}$$

$$= \frac{d - d(2t^2 - 1)}{b - dt}$$

$$= \frac{2dt^2 - d - d}{b - dt} \quad (0 < t < 1)$$

よって

$$f(t) = \frac{d(2dt^2 - 4t + 2d)}{(dt - b)^2}$$

$$= \frac{d \left\{ 2d \left(t - \frac{b}{d} \right)^2 - \frac{2b^2}{d} + 2d \right\}}{(dt - b)^2}$$

$$(dt - b)^2$$

$$g(t) = 2d \left(t - \frac{b}{d} \right)^2 - \frac{2b^2}{d} + 2d$$

$$\text{よって (軸)}: t = \frac{b}{d} > 1 \text{ より,}$$

$$f(t) \text{ は } 0 < t < 1 \text{ で最大値をとる}$$

ためには $g(t)$ の係数が正である

に確かめなければならない. 求めるのは

$$\begin{cases} g(0) = 2d + 2d > 0 \\ g(1) = 2d + 2d - 4b < 0 \end{cases}$$

$$\therefore d < \frac{4b}{3}$$

$$d, b \text{ の範囲 } 0 < b$$

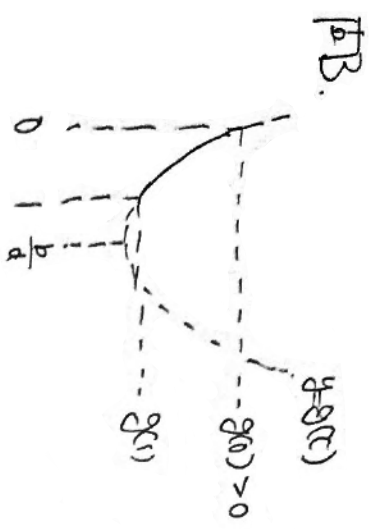
よってこのとき $g(t) = 0$ を満たす

実数は d の範囲

t	0 ... d ... 1
g(t)	x + 0 - x
f(t)	x $\nearrow$ $\searrow$ x

よって最大値は $f(d)$ となる.

$$\therefore 0 < d < \frac{4b}{3}, d < \frac{4b}{3}$$



(i) $g(1) < 0$ のとき
 最大値が存在しない。

(ii) $g(1) \geq 0$ のとき
 $g(x) \geq 0$ であるから $g(x)$ は
 単調増加。 $g(x)$ の定義域
 が $0 < x < 1$ のとき最大値は
 存在しない。