2017 東京医科歯科（医）

1

(1) $n=1$, $a_1=1$のとき

$|1-b_1|>|1-c_1|>|1-a_2|$

b_1, c_1, a_2は$2, 3, 4$のいずれかなので

$b_1=4,\ c_1=3,\ a_2=2$ //

(2) $n=2$, $a_1=7$のとき

$$\begin{cases} |7-b_1|>|7-c_1|>|7-a_2| \\ |a_2-b_2|>|a_2-c_2|>|a_2-a_3| \end{cases}$$

これらの絶対値は$1\sim6$までの異なる値をとる．最大は$|7-b_1|$か$|a_2-b_2|$だが6を作るには$|7-b_1|=6$, $\underline{b_1=1}$ // となるしかない．5は$|7-c_1|$か$|a_2-b_2|$だが$b_2 \neq 1$より$|7-c_1|=5$となるので$\underline{c_1=2}$ //．同様に$\underline{a_2=3}$ //．よって

$|c_2-b_2|=3$
$|a_2-c_2|=2$
$|a_2-a_3|=1$

$\therefore \underline{b_2=6,\ c_2=5,\ a_3=4}$ //

(3)

$$\begin{cases} |1-b_1|>|1-c_1|>|1-a_2| \\ |a_2-b_2|>|a_2-c_2|>|a_2-a_3| \\ \quad\vdots \\ |a_n-b_n|>|a_n-c_n|>|a_n-a_{n+1}| \end{cases}$$

これらの絶対値は$1\sim3n$までの異なる値をとる．最大は$|1-b_1|$, $|a_2-b_2|, \cdots, |a_n-b_n|$のいずれかだが$3n$を作るには$b_1=3n+1$となるしかない．(2)と同様の考えで$c_1=3n$, $a_2=3n-1$となる．$3n-3$になるのは$|a_2-b_2|, \cdots, |a_n-b_n|$のいずれかだが$a_2\sim a_n$で最大なのは$a_2$より，$|a_n-b_n|$が$3n-3$となるので，$b_2=2$．以後同様に$c_2=3$, $\underline{a_3=4}$ //．

(4)

(3)と同様に進めれば

$(b_1, c_1, a_2)=(3n+1, 3n, 3n-1)$
$(b_2, c_2, a_3)=(2, 3, 4)$
$(b_3, c_3, a_4)=(3n-2, 3n-3, 3n-4)$
$(b_4, c_4, a_5)=(5, 6, 7)$
$\vdots$

と順に定まるので，iを自然数として

$$a_{2i-1}=1+(i-1)3 = 3i-2$$

$$b_{2i-1}=3n+1+(i-1)(-3) = -3i+3n+4$$

$$c_{2i-1}=3n+(i-1)(-3) = -3i+3n+3$$

より

$$a_{29}=3\cdot15-2=43$$

$$b_{29}=-3\cdot15+3\cdot2017+4 = 6010$$

$\underline{c_{29}=6009}$ //

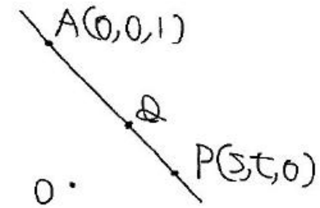
2

(1)

中心$(0, 0, \frac{1}{2})$，半径$\frac{1}{2}$の球面より

$\underline{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}}$ //

(2)



$P(s, t, 0)$とおくと方向ベクトルし

$$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix} s \\ t \\ -1 \end{pmatrix}$$

とすれば

$$\text{直線}AP: \begin{cases} x=sk \\ y=tk \\ z=1-k \end{cases} \quad (k\in R)$$

と表せる．これと球面のを連立すると

$$s^2k^2+t^2k^2+\left(\frac{1}{2}-k\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (s^2+t^2+1)k^2-k=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{s^2+t^2+1} \quad (k\neq0)$$

$\therefore Q\left(\dfrac{s}{s^2+t^2+1}, \dfrac{t}{s^2+t^2+1}, \dfrac{s^2+t^2}{s^2+t^2+1}\right)$

ゆえに

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2+t^2+1} \\ \frac{t}{s^2+t^2+1} \\ \frac{s^2+t^2}{s^2+t^2+1} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s \\ t \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore \overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AP}$$

(2)

$$\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{AS} = -|\overrightarrow{OS}|^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} p \\ q \\ r-1 \end{pmatrix} = -(p^2+q^2+r^2)$$

$$\Leftrightarrow 2p^2+2q^2+2r^2-r=0 \quad \cdots ①$$

$$\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{SQ} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{s}{s^2+t^2+1}-p \\ \frac{t}{s^2+t^2+1}-q \\ \frac{s^2+t^2}{s^2+t^2+1}-r \end{pmatrix} = 0 \quad (\because \overrightarrow{OS}\perp\overrightarrow{SQ})$$

$$\Leftrightarrow \frac{ps+qt+r(s^2+t^2)}{s^2+t^2+1} = p^2+q^2+r^2 = \frac{r}{2} \quad (\because ①)$$

$$\Leftrightarrow ps+qt+r(s^2+t^2) = \frac{r}{2}(s^2+t^2+1)$$

$$\Leftrightarrow ps+qt+\frac{r}{2}(s^2+t^2) = \frac{r}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2p}{r}s+\frac{2q}{r}t+s^2+t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(s+\frac{p}{r}\right)^2+\left(t+\frac{q}{r}\right)^2 = 1+\frac{p^2+q^2}{r^2} = \frac{\frac{r}{2}}{r^2} = \frac{1}{2r}$$

求める軌跡は

xy平面上の円 $\left(x+\frac{p}{r}\right)^2+\left(y+\frac{q}{r}\right)^2 = \frac{1}{2r}$ //

[3]

(1) 与式に $x=0, 1$ を代入

$$\begin{cases} 0 = \int_0^1\left(\int_u^1 f(t)dt\right)du \\ \int_0^1 f(t)dt = a+1+\int_0^1\left(\int_0^u f(t)dt\right)du \end{cases}$$

辺々たすと

$$\int_0^1 f(t)dt = a+1+\int_0^1\left(\int_0^1 f(t)dt\right)du$$

$$\Leftrightarrow b = a+1+\int_0^1 b\,du \quad とおく$$

$$\Leftrightarrow b = a+1+b$$

$$\therefore a=-1 \quad //$$

与式を微分して

$$f(x) = 12ax^2+1-3a+\int_0^x f(t)dt - \int_x^1 f(t)dt \quad \cdots ①$$

となるので

$$f(0) = 1-3a-\int_0^1 f(t)dt$$

$$f(1) = 9a+1+\int_0^1 f(t)dt$$

$$\therefore f(0)+f(1) = 6a+2 = -4 \quad //$$

(2) ①を微分して

$$f'(x) = 24ax+f(x)-(-f(x)) = -24x+2f(x)$$

$\downarrow f(x)=e^{2x}g(x)$

$$2e^{2x}g(x)+e^{2x}g'(x) = -24x+2e^{2x}g(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = -24xe^{-2x} \quad //$$

(3)

$$g(x) = \int(-24xe^{-2x})dx = 12xe^{-2x}+6e^{-2x}+C$$

$\boxed{-24xe^{-2x}+12e^{-2x}}$ $\boxed{-12e^{-2x}}$ 微分したもの

$$\therefore f(x) = 12x+6+Ce^{2x}$$

$$\begin{array}{rl} & f(0) = 6+C \\ +) & f(1) = 18+Ce^2 \\ \hline & -4 = 24+(1+e^2)C \end{array}$$

$$\therefore C = \frac{-28}{1+e^2}$$

$$\therefore f(x) = 12x+6-\frac{28}{1+e^2}e^{2x} \quad //$$