2016 東海大医 2日目（赤本あり）

$\boxed{1}$

(1)

$4(2^x)^2-33\cdot 2^x+8=0$

$\Leftrightarrow (4\cdot 2^x-1)(2^x-8)=0$

$\Leftrightarrow 2^x=\frac{1}{4},\ 8$

$\therefore x=\underline{-2,\ 3}$

(2)

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=0$

$\Leftrightarrow 2\underbrace{|\vec{a}|^2}_{4}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\underbrace{|\vec{b}|^2}_{9}=0$

$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\underline{-\frac{1}{6}}$

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2$

$=\underbrace{|\vec{a}|^2}_{4}+4\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{-1}+4\underbrace{|\vec{b}|^2}_{9}$

$=36$

$\therefore |\vec{a}+2\vec{b}|=\underline{6}$

(3)

P(3回とも同じ)

$=P(赤\times 3)+P(白\times 3)$

$=\left(\frac{7}{10}\right)^3+\left(\frac{3}{10}\right)^3=\underline{\frac{37}{100}}$

$P(赤\times 2, 白\times 1)$

$={}_3C_2\left(\frac{7}{10}\right)^2\frac{3}{10}=\underline{\frac{441}{1000}}$

(4)

$n=4x+1=7y+2\quad (n,x,y\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow 4x-7y=1$

$-)\ 4\cdot 2-7\cdot 1=1$

$4(x-2)-7(y-1)=0$

$\Leftrightarrow 4(x-2)=7(y-1)$

$x-2=7k\quad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x=7k+2$

$\Downarrow$

$n=4(7k+2)+1$

$=28k+9$

$k=4$のとき $n=121$

$k=35$のとき $n=989$

$28\,)\overline{991}$ → 35

84

151

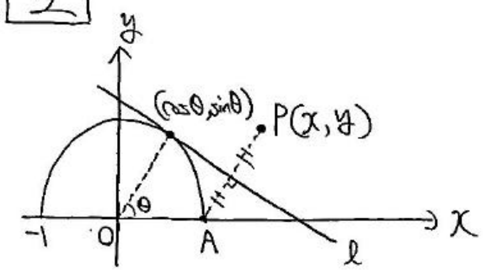
140

11

つまり

$35-4+1=\underline{32個}$

$\boxed{2}$



(1)は後回し

(2)

$l:(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$

A(1, 0)の距離dは

$d=\frac{|\cos\theta+0-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}$

$=\underline{1-\cos\theta}$

(3)

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\underbrace{AP}_{2-2\cos\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}(2-2\cos\theta)\cos\theta+1\\(2-2\cos\theta)\sin\theta\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases}x=2\cos\theta(1-\cos\theta)+1\\ y=2\sin\theta(1-\cos\theta)\end{cases}$ …①

$\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta(1-\cos\theta)+2\cos\theta\sin\theta$

$=2\sin\theta(2\cos\theta-1)$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$+$	0	$-$	0
x		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	

$\theta=\underline{\frac{\pi}{3}}$のとき最大値 $\underline{\frac{3}{2}}$

$\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta(1-\cos\theta)+2\sin^2\theta$

$=-4\cos^2\theta+2\cos\theta+2$

$=-2(2\cos^2\theta-\cos\theta-1)$

$=-2(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)$

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{d\theta}$	0	$+$	0	$-$	$-$
y		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	

$\theta=\underline{\frac{2}{3}\pi}$のとき最大値 $\underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

(1) ①に$\theta=\frac{\pi}{4}$を代入

$\underline{P(\sqrt{2},\ \sqrt{2}-1)}$

(4)

$$\frac{dx}{d\theta}=2\sin 2\theta-2\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta-2\cos 2\theta$$

L

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{8-8\sin 2\theta\sin\theta-8\cos 2\theta\cos\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{8-8(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{8-8\cos(2\theta-\theta)}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{8-8\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\sqrt{16\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\left|4\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}4\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$=\left[-8\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=\underline{8}$$

$\boxed{3}$

(1)

$f(0)=1,\ f(1)=8,\ f(2)=27$

より $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$$\begin{cases} c=1 \\ a+b+c=8 \\ 4a+2b+c=27 \end{cases}$$

解くと $a=6,\ b=1$

$\therefore\ \underline{f(x)=6x^2+x+1}$

$(x+1)^3-f(x)$

$=x^3+3x^2+3x+1-(6x^2+x+1)$

$=x^3-3x^2+2x$

$=\underline{x(x-1)(x-2)}$

(2)

$n=3$ のとき

$g(x)=(x+1)^4-f(x)$

とおくと

$g(0)=1^4-f(0)=0$

$g(1)=2^4-f(1)=0$

$g(2)=3^4-f(2)=0$

$g(3)=4^4-f(3)=0$

$\therefore\ \underbrace{(x+1)^4-f(x)}_{3次式}=\underline{x(x-1)(x-2)(x-3)}$

$\downarrow x=4$

$5^4-f(4)=4\cdot3\cdot2\cdot1$

$\Leftrightarrow\ f(4)=625-24=\underline{601}$

$\underbrace{(x+1)^4}_{x^4+4x^3+\cdots}-f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$

$(f(x)\text{の}x^3\text{の係数})=4+6=\underline{10}$

(3)

同様に

$(x+1)^{n+1}-f(x)=x(x-1)\cdots(x-n)$

$\downarrow x=-1$

$-f(-1)=(-1)(-2)(-3)\cdots\{-(n+1)\}$

$=(-1)^{n+1}(n+1)!$

$\therefore\ \underline{f(-1)=(-1)^n(n+1)!}$

(4)

$$a_n=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{(x+1)^n}$$

より a_n は $f(x)$ の n 次の係数であることがわかる

$f(x)$

$=(x+1)^{n+1}-\underbrace{x(x-1)\cdots(x-n)}_{h(x)とおく}$

$\boxed{x^n\text{の係数は二項定理でわかる}}$

$h(x)=x(x-1)\cdots(x-n)=x^{n+1}+ax^n+\cdots$

とおくと

$h^{(n)}(x)=(n+1)!\,x+n!\,a$

$\Leftrightarrow\ n!\{x+(x-1)+(x-2)+\cdots+(x-n)\}$

$=(n+1)!\,x+n!\,a$

$\downarrow x=0$

$n!(-1-2-3-\cdots-n)=n!\,a$

$\therefore\ a=-\frac{1}{2}n(n+1)$

つまり

a_n

$=(f(x)\text{の}n\text{次の係数})$

$={}_{n+1}C_1-(-a)$

$=n+1+\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\underline{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$