2016 東京医科歯科大(医)

$\boxed{1}$ (1)

$S(p^2q)$

$=(1+p+p^2)(1+q)=2p^2q^2$

$\Leftrightarrow 0=p^2q-p^2-p-1-pq-q$

$\Leftrightarrow 0=(p^2-p-1)q-p^2-p-1$

$\Leftrightarrow q=\dfrac{p^2+p+1}{p^2-p-1}$ $(p^2-p-1>0)$

$=1+\dfrac{2p+2}{p^2-p-1}$

qが自然数になるのは$p^2-p-1=1$か2

だが, $p^2-p-1=2$をみたす素数pは

存在しない.

$\therefore p^2-p-1=1$

解くと $p=2$ ($\because p$は素数)

$q=7$

$\therefore n=p^2q=\underline{28}_{/\!/}$

(2)

$S(n)=n+1$をみたすnは

素数である. 故に

「nは素数$\Rightarrow a$は素数」

を示す. これを示すため

「aが素数でない$\Rightarrow n$が素数でない」

を示す.

$a=rt$ (r, tは整数)

とおくと

$n=2^{rt}-1$

$=(2^r-1)\{(2^r)^{t-1}+(2^r)^{t-2}+\cdots+1\}$

とできるのでnは素数でない.

対偶が示されたので$S(n)=n+1$

のときaは素数.

(3)

$S(n)$

$=S(2^{a-1}(2^a-1))$

$=S(2^{a-1})S(2^a-1)$

$=(1+2+\cdots+2^{a-1})S(2^a-1)$

$=(2^a-1)S(2^a-1)$

$\leqq 2n=2^a(2^a-1)$

$\Leftrightarrow S(2^a-1)\leqq 2^a \cdots ①$

基本的に2^a-1が素数であるかないか

に関わらず$S(2^a-1)\geqq 1+2^a-1$

$=2^a$

であるので①をふまえ

$S(2^a-1)=2^a$

となる. (2)よりaは素数である.

ところで2^aの一の位の数は

$a=1,2,3,4,5,\cdots$のときに

$2,4,8,6,2,\cdots$と繰り返す.

つまりkを整数として

(2^{4k+1}の一の位)$=2$

(2^{4k+2}の一の位)$=4$

(2^{4k+3}の一の位)$=8$

(2^{4k}の一の位)$=6$

となる. aは素数であることをふまえ

(i) $a=4k+1$のとき

($n=2^{4k}(2^{4k+1}-1)$の一の位)

$=6\cdot(2-1)=6$

(ii) $a=4k+3$のとき

($n=2^{4k+2}(2^{4k+3}-1)$の一の位)

$=(4\cdot(8-1)$の一の位$)$

$=8$

(iii) $a=2$のとき

$n=2^1(2^2-1)=6$

よりnの一の位は6か8である.

$\boxed{2}$

(1)

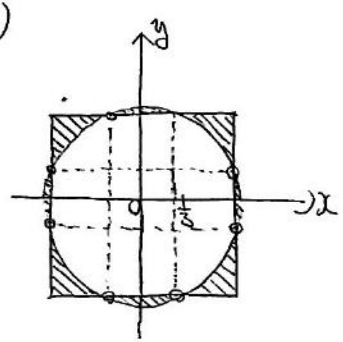
Rのxy平面による断面は

$|x| \leqq 1, |y| \leqq 1, z=0$

と

$x^2+y^2 \leqq \frac{10}{9}, z=0$

のいずれか一方のみに含まれる集合より



(2)

$S_x \neq \phi$ であるため $r \geqq 1$ をみたす最小値が r_1 である.

$\therefore \underline{r_1=1}$ //

$S_x \cap S_y \neq \phi$ であるためには

$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ かつ $x^2+y^2+z^2 \leqq r^2$

をみたす実数 (x, y, z) が存在

するような r の範囲を求める.

$r^2 \geqq 2$ であればよく

$\underline{r_2=\sqrt{2}}$ //

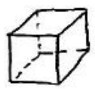
$S_x \cap S_y \cap S_z \neq \phi$ であるためには

同様に $r^2 \geqq 3$ であればよいので

$\underline{r_3=\sqrt{3}}$ //

また

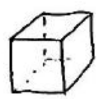
$V(r_1)$

$=$  $-$ 

$= 2 \cdot 2 \cdot 2 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3$

$= \underline{8 - \frac{4\pi}{3}}$ //

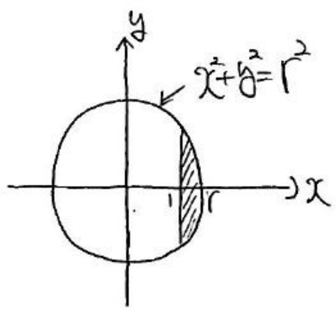
$V(r_3)$

$=$  $-$ 

$= \frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 - 8$

$= \underline{4\sqrt{3}\pi - 8}$ //

(3)



求める体積は斜線部分をx軸のまわりに1回転してできた体積より

$\int_1^r y^2 \pi dx$

$= \pi \int_1^r (r^2-x^2) dx$

$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_1^r$

$= \underline{\pi \left(\frac{2}{3}r^3 - r^2 + \frac{1}{3} \right)}$ //

(4)

$0 < r < r_1$ においては

$V(r)$ は明らかに単調減少

するので $r_1 \leqq r \leqq r_2$ のときを

考える. (3)の体積を W と

すると求める体積は

$V(r) = 6W + 2^3 - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - 6W \right)$

$= 12W - \frac{4}{3}\pi r^3 + 8$

$V'(r)$

$= 12\pi(2r^2 - 2r) - 4\pi r^2$

$= 20\pi r^2 - 24\pi r$

$= 4\pi r(5r-6)$

r	$1 \cdots \frac{6}{5} \cdots \sqrt{2}$
$V'(r)$	$-$ 0 $+$
$V(r)$	↘ ↗

求める値は $\underline{r=\frac{6}{5}}$ //

$\boxed{3}$

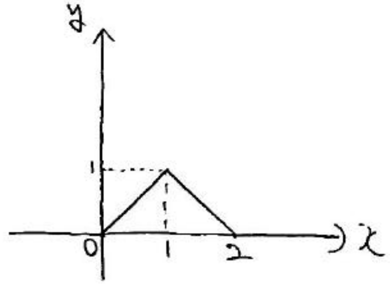
$f(x)$

$$= \frac{x+|x|}{2} - \frac{2(x-1)+2|x-1|}{2} + \frac{x-2+|x-2|}{2}$$

$$= \frac{|x|-2|x-1|+|x-2|}{2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x-2(x-1)+x-2}{2} & (x \geqq 2) \\ \dfrac{x-2(x-1)+2-x}{2} & (1 \leqq x < 2) \\ \dfrac{x-2(1-x)+2-x}{2} & (0 \leqq x < 1) \\ \dfrac{-x-2(1-x)+2-x}{2} & (x < 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & (x \geqq 2) \\ -x+2 & (1 \leqq x < 2) \\ x & (0 \leqq x < 1) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$



(2)

$g(x)$ 　$x-t=u$ とおく
　$-dt=du$

$$= \int_x^{x-1} f(u)(-du)$$

$$= \int_{x-1}^{x} f(u)\,du$$

(i) $x \leqq 0,\ 3 \leqq x$ のとき

$g(x)=0$

(ii) $0 \leqq x < 1$ のとき

$g(x)$

$$= \int_0^x u\,du = \frac{1}{2}x^2 \leqq \frac{1}{2}$$

(iii) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$g(x)$

$$= \int_{x-1}^{1} u\,du + \int_1^x (-u+2)\,du$$

$$= \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{x-1}^{1} + \left[-\frac{1}{2}u^2+2u\right]_1^x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2} - 2$$

$$= -x^2+3x-\frac{3}{2} = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

(iv) $2 \leqq x \leqq 3$ のとき

$g(x)$

$$= \int_{x-1}^{2} (-u+2)\,du$$

$$= \left[-\frac{1}{2}u^2+2u\right]_{x-1}^{2}$$

$$= -2+4+\frac{1}{2}(x-1)^2-2(x-1)$$

$$= \frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x-3)^2 \leqq \frac{1}{2}$$

以上より

最大値 $g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$ //

(3)

$P(s)$

$$= \underbrace{\int_0^3 x^2 g(x)\,dx}_{a} - 2s\underbrace{\int_0^3 x g(x)\,dx}_{b} + s^2\underbrace{\int_0^3 g(x)\,dx}_{c}$$

ここで

$$\int_0^3 x^n g(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^{n+2}\,dx$$

$$+ \int_1^2 \left(-x^{n+2}+3x^{n+1}-\frac{3}{2}x^n\right)dx$$

$$+ \int_2^3 \left(\frac{1}{2}x^{n+2}-3x^{n+1}+\frac{9}{2}x^n\right)dx$$

$$= \frac{1}{2(n+3)}$$

$$+ \left[-\frac{x^{n+3}}{(n+3)} + \frac{3}{n+2}x^{n+2} - \frac{3}{2(n+1)}x^{n+1}\right]_1^2$$

$$+ \left[\frac{x^{n+3}}{2(n+3)} - \frac{3x^{n+2}}{n+2} + \frac{9x^{n+1}}{2(n+1)}\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{2(n+3)}$$

$$- \frac{2^{n+3}-1}{n+3} + \frac{3\cdot 2^{n+2}-3}{n+2} - \frac{3\cdot 2^{n+1}-3}{2(n+1)}$$

$$+ \frac{3^{n+3}-2^{n+3}}{2(n+3)} - \frac{3\cdot 3^{n+2}-3\cdot 2^{n+2}}{n+2} + \frac{9\cdot 3^{n+1}-9\cdot 2^{n+1}}{2(n+1)}$$

a

$$= \frac{1}{10} - \frac{31}{5} + \frac{45}{4} - \frac{21}{6} + \frac{211}{10} - \frac{195}{4} + \frac{171}{6}$$

$$= \frac{5}{2}$$

同様に 　$g(x)$ の期待値

$b = \frac{3}{2}$, $c = 1$

より

$$P(s) = s^2 - 3s + \frac{5}{2}$$

$$= \left(s-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$g(x)$ の分散

$P(s)$ の最小値は $P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$ //

雑談

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) = 1$ になるので $f(x)$, $g(x)$ は確率密度関数です．$P(s)$ は $g(x)$ の s のまわりの2次の積率なので，$P(s)$ を最小にする s は $g(x)$ の期待値である $\frac{3}{2}$ であることはすぐわかります．