2015 横浜市立大医

[I]

(1)

(ア)

$$\begin{array}{ccc} n-2 & n-1 & n \\ P_{n-2} & P_{n-1} \xrightarrow{\frac{1}{2}} & P_n \end{array} \qquad P_{n-2} \xrightarrow{\frac{1}{2}} P_n$$

$$\underline{P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}P_{n-2}}$$

(イ)

$$P_1 = \frac{1}{2}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

(解)

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha = 1, -\frac{1}{2}$$

$P_n = C_1\cdot 1^{n-1} + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ とおける.

$$\downarrow$$

$$P_1 = C_1 + C_2 = \frac{1}{2}$$

$$-)\ P_2 = C_1 - \frac{1}{2}C_2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{2}C_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore C_2 = -\frac{1}{6},\ C_1 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore P_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \underline{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

(2)

$$S$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2}d\theta$$

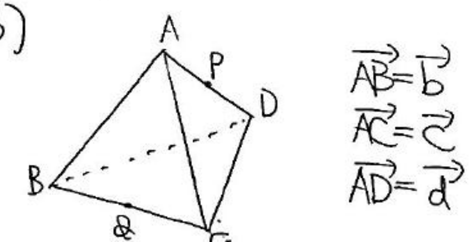
$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2}dt$$

$$= \frac{9a^2}{2}\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t^3}\right]_0^{\infty}$$

$$= \underline{\frac{3a^2}{2}}$$

(3)



$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$$
$$\overrightarrow{AC} = \vec{c}$$
$$\overrightarrow{AD} = \vec{d}$$

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}$$

$$= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\cdot(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})\left(\frac{\vec{d}}{2} - \vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2} - a^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$= \underline{-\frac{a^2}{2}}$$

(4) 与式をSとおく

$$S = 1^2\cdot 2^{n-1} + 2^2\cdot 2^{n-2} + \cdots + n^2\cdot 2^0$$

$$-)\ \frac{1}{2}S = \qquad 1^2\cdot 2^{n-2} + \cdots + (n-1)^2\cdot 2^0 + n^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{S}{2} = 2^{n-1} + 3\cdot 2^{n-2} + \cdots + (2n-1)\cdot 1 - \frac{n^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow S = 2^n + 3\cdot 2^{n-1} + \cdots + (2n-1)2 - n^2$$

$$-)\ \frac{1}{2}S = \qquad 1\cdot 2^{n-1} + \cdots + (2n-3)2 + (2n-1) - \frac{n^2}{2}$$

$$\frac{S}{2} = 2^n + 2\cdot 2^{n-1} + \cdots + 2\cdot 2 - 2n + 1 - \frac{n^2}{2}$$

$$= 2^n + 2\frac{2-2^n}{1-2} - 2n + 1 - \frac{n^2}{2}$$

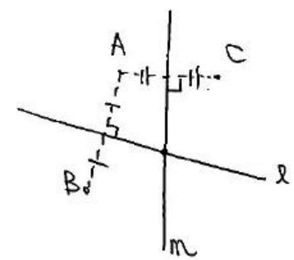
$$= 3\cdot 2^n - 4 - 2n + 1 - \frac{n^2}{2}$$

$$= 3\cdot 2^n - \frac{n^2}{2} - 2n - 3$$

$$\therefore \underline{S = 3\cdot 2^{n+1} - n^2 - 4n - 6}$$

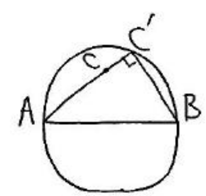
[II]

(1)



3点をA.B.Cとし線分AB.ACの垂直二等分線をl.mとする. l.mの交点はXであり、Xとおくと AX=BX=CXより, Xは3点A.B.Cを通る円の中心となる.

(2)



仮に線分ABを直径とする円の内部にCを含むとする. 直線ACと円の交点でAでない方をC′とする. △ABC′は直角三角形となる. 直角三角形の斜辺は一番長いので

$$AB > AC' > AC$$

となりA.B間の距離が他の2点間の距離より短いことに反する. 最初の仮定が誤りなので, 線分ABを直径とする円は内部に点Cを含まない.

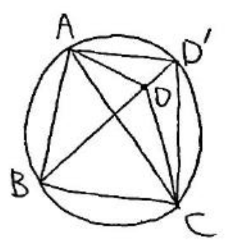
(3)

4点が同一円周上になく, かつどの3点も同一円周上にない場合.

四角形ABCDで考えることができる

仮にどの3点を選んでもその3点を通る円は残りの1点を円の

内部に含むとする.



A, B, Cを通る円と直線BDのBでない交点をD′とする. Dは△ACD′の内部にあるので

$\angle ABC+\angle CDA$

$>\angle ABC+\angle CD'A=180^\circ \cdots ①$

同様にA, B, Dを通る円を考えることで

$\angle DAB+\angle BCD>180^\circ \cdots ②$

となる. ①+②より

$\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB$
$>360^\circ$

となり, これは四角形となることに反する. 最初の仮定が誤りなので

うまく3点を選べばその3点を通る円は残りの点を内部に含まないことができる.

[III] 方針

$\sqrt{15}+2$ と $\sqrt{15}-2$ の平均は $\sqrt{15}$ より $\sqrt{15}\left(1+\frac{2}{\sqrt{15}}\right)$, $\sqrt{15}\left(1-\frac{2}{\sqrt{15}}\right)$ と見れば近似式の x に $\pm\frac{2}{\sqrt{15}}$ を代入すればいいことに気がつく.

解

近似式で $x=\frac{2}{\sqrt{15}}$, $a=\frac{1}{3}$ のとき

$\left(1+\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\fallingdotseq 1+\frac{2}{3\sqrt{15}}-\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{5}+\frac{5}{27\cdot 3}\cdot\frac{8}{5\sqrt{15}} \cdots ①$

$x=-\frac{2}{\sqrt{15}}$, $a=\frac{1}{3}$ のとき

$\left(1-\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\fallingdotseq 1-\frac{2}{3\sqrt{15}}-\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{5}-\frac{5}{81}\cdot\frac{8}{5\sqrt{15}} \cdots ②$

①, ②引くと

$\left(1+\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\fallingdotseq \frac{4}{3\sqrt{15}}+\frac{10}{81}\cdot\frac{8}{5\sqrt{15}}$

$=\frac{108+16}{81\sqrt{15}}$

$=\frac{124}{81}\times 5^{-\frac{1}{2}} \cdots ③$

③に両辺 $\times 5^{\frac{1}{6}}$

$(\sqrt{15}+2)^{\frac{1}{3}}-(\sqrt{15}-2)^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{124}{81}\times 5^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}$

$\fallingdotseq \frac{124}{81}\times 0.6$

$=\frac{124}{135}$

$=0.9185$

$\fallingdotseq \underline{0.92}$ //

```
      0.9185
135 ) 1240
      1215
        250
        135
       1150
       1080
         700
         675
          25
```

(2)

$x^3+3x-4=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0$

$\Leftrightarrow x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

実数解は $x=1$ のみである.

$a=\sqrt[3]{\sqrt{15}+2}$, $b=\sqrt[3]{\sqrt{15}-2}$

として $a-b$ を3次式に代入すると

$(a-b)^3+3(a-b)-4$

$=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2+3(a-b)-4$

$=4-\underset{1}{\underline{3ab}}(a-b)+3(a-b)-4$

$=0$

よって $a-b$ はこの3次方程式の解である. $a-b$ は実数なので

$a-b=\sqrt[3]{\sqrt{15}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{15}-2}=1$

[IV] (1)

○ $x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n=x$ の証明

$$x_1 \geqq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$
$$x_2 \geqq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$
$$\vdots$$
$$x_n \geqq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

辺々たすと

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqq x_1+x_2+\cdots+x_n$$

等号成立は

$$x_1=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x$$
$$x_2=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x$$
$$\vdots$$
$$x_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x$$

のとき.

○ $x_1=x_2=\cdots=x_n=x \Rightarrow x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ の証明

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ がすべて x であれば最小値が x なのは明らか.

(2)

$$F$$
$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N-N}{b_1+b_2+\cdots+b_{N+1}}$$
$$=\frac{N}{N+1}\cdot\frac{(N+1)(a_1+a_2+\cdots+a_N)-N(N+1)}{N(b_1+b_2+\cdots+b_{N+1})}$$
$$=\frac{N}{N+1}\cdot\frac{N(a_1+\cdots+a_N)+a_1+\cdots+a_N-N(N+1)}{N(b_1+\cdots+b_{N+1})}$$

ここで $a_1, a_2, \cdots, a_N$ の最小値の1つを a_m とすると

$$\geqq\frac{N}{N+1}\cdot\frac{N(a_1+\cdots+a_N)+Na_m-N(N+1)}{N(b_1+\cdots+b_{N+1})}$$
$$=\frac{N}{N+1}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_N+a_m-(N+1)}{b_1+\cdots+b_{N+1}}$$
$$=\frac{N}{N+1}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_m+a_m+\cdots+a_N-(N+1)}{b_1+\cdots+b_{N+1}}$$
$$=\frac{N}{N+1}\cdot\frac{(a_1-1)+\cdots+(a_m-1)+(a_m-1)+\cdots+(a_N-1)}{b_1+\cdots+b_{N+1}}$$

ここで $b_i<a_i$ かつ $b_{i+1}<a_i$ なので b_i, a_i は自然数より

$$a_i-1\geqq b_i \quad (i=1,2,\cdots,m)$$
$$a_i-1\geqq b_{i+1} \quad (i=m,m+1,\cdots,N)$$

$$\geqq\frac{N}{N+1}\cdot\frac{b_1+\cdots+b_m+b_{m+1}+\cdots+b_{N+1}}{b_1+\cdots+b_{N+1}}$$
$$=\frac{N}{N+1}$$

$\therefore\ F\geqq\frac{N}{N+1}$

等号成立は

$$a_i=a_m \quad (i=1,2,\cdots,N)$$
$$a_i-1=b_m \quad (i=1,2,\cdots,m)$$
$$a_i-1=b_{m+1} \quad (i=m,m+1,\cdots,N)$$

すなわち

$a_m=a_1=a_2=\cdots=a_N=b_1+1=\cdots=b_{N+1}+1$

のとき. これより F の最小値は $\frac{N}{N+1}$.

(3) (2)より

$a_1=a_2=\cdots=a_N=b_1+1=\cdots=b_{N+1}+1$