2015 順天堂医

1

(1)

$y=2x+1$ ← 暗算 //

(1, 0), (4, 0)を通るのは

$y=(x-1)(x-4)=g(x)$ //

$y=f(x)+\alpha g(x)$

$=2x+1+\alpha(x-1)(x-4)$

$=2x+1+\alpha(x^2-5x+4)$ //

↓ C(−1, 9)をとる

$9=-1+10\alpha$

$\therefore\ \alpha=1$ //

A, B, Cを通る3次曲線は

y

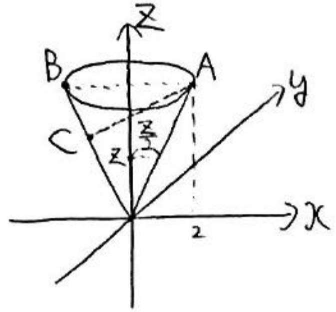
$=2x+1+(x^2-5x+4)$

$\quad +\alpha(x-1)(x-4)(x+1)$

$=x^2-3x+5+\alpha(x^3-4x^2-x+4)$ //

(2)

水の体積 … $4\pi\times4\times\frac{1}{3}=\frac{16\pi}{3}$ //



前から見た母線 $z=2x$

$z=z$のとき断面の円の半径は$\frac{z}{2}$

$\therefore$ 円錐の方程式

$x^2+y^2=\frac{1}{4}z^2$ //

また $A(2, 0, 4)$ //

$C(t, 0, -2t)$とおくと

$(\text{CAの傾き})=\frac{4+2t}{2-t}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ t=-\frac{6}{5}$

$\therefore\ C\left(\frac{-6}{5}, 0, \frac{12}{5}\right)$ //

CA: $z=\frac{1}{2}(x-2)+4$

$=\frac{1}{2}x+3$ //

(楕円Eの長軸)

$=CA$

$=\sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}$

$=\frac{8\sqrt{5}}{5}$ //

楕円の中心＝CAの中点 $\left(\frac{2}{5}, 0, \frac{16}{5}\right)$

円錐の方程式に代入

$\frac{4}{25}+y^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{256}{25}$

$y^2=\frac{60}{25}$

$y=\pm\frac{2\sqrt{15}}{5}$

短軸 $=\frac{4\sqrt{15}}{5}$ //

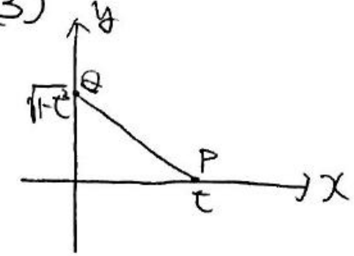
$OC=\sqrt{\frac{36}{25}+0+\frac{144}{25}}$

$=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ //

残る水 $=\underbrace{\frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{15}}{5}\pi}_{\text{楕円}}\times\underbrace{\frac{6\sqrt{5}}{5}}_{\text{高さ}}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{16\sqrt{15}}{25}\pi$ //

(3)



PQ: $\frac{x}{t}+\frac{y}{\sqrt{1-t^2}}=1 \quad (0<x<t)$

$\Leftrightarrow\ y=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x+\sqrt{1-t^2}$

$=\sqrt{1-t^2}\left(1-\frac{x}{t}\right)$

$(x<t<1)$

$\frac{dy}{dt}=\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\left(1-\frac{x}{t}\right)+\sqrt{1-t^2}\cdot\frac{x}{t^2}$

$=\frac{x-t^3}{t^2\sqrt{1-t^2}}$

t	$(x)\cdots x^{\frac{1}{3}}\cdots(1)$
$\frac{dy}{dt}$	$+\ 0\ -$
y	$(0)\nearrow\quad\searrow(0)$

$t=x^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x=t^3$のとき

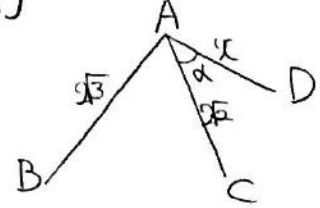
最大値 $y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ 0<y\leqq\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqq1,\ x>0,\ y>0$

$a=1, b=-1, c=2, d=1, e=3, f=\frac{2}{3}$ //

(4)



余
$$\cos\angle BAC=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore \angle BAC=75^\circ$ ← 要暗記!

$\triangle CAD$, $\triangle BAD$ に 余

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{4}{2\sqrt{2}x}=\dfrac{\sqrt{2}}{x} & (-90^\circ<\alpha<90^\circ)\\ \cos(75^\circ+\alpha)=\dfrac{6}{2\sqrt{3}x}=\dfrac{\sqrt{3}}{x} & (-165^\circ<\alpha<15^\circ)\end{cases}$$

以上より $-90^\circ<\alpha<15^\circ$

$$\cos 75^\circ\cos\alpha-\sin 75^\circ\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{x}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{x}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{x}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{12}-2}{4x}-\frac{4\sqrt{3}}{4x}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-2\sqrt{3}-2}{x}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin\alpha$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-2}{x}=\sqrt{2}\sin\alpha$$

2乗して

$$\frac{4}{x^2}=2\cdot\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$\frac{8}{x^2}=2$$

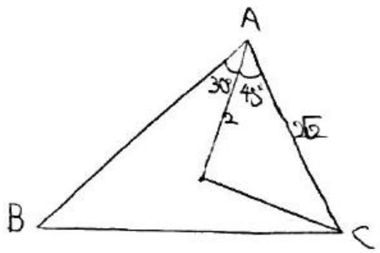
$\therefore \underline{x=2}$ // $(\because x>0)$

$\therefore \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

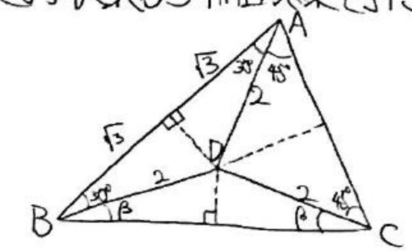
$-90^\circ<\alpha<15^\circ$ より

$\alpha=-45^\circ$

改めて図を書き直す.



この状況から補助線を引き



Dが△ABCの外心となることに気が付けば $\beta=15^\circ$ と出せるので

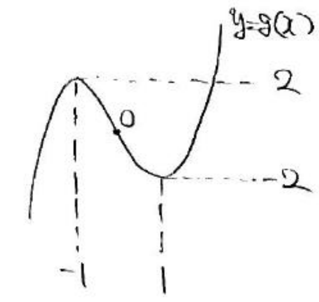
$$\sin\angle BCD=\sin 15^\circ=\underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\ //$$

2

$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$g''(x)=6x$

変曲点 $\underline{(0,0)}$ //

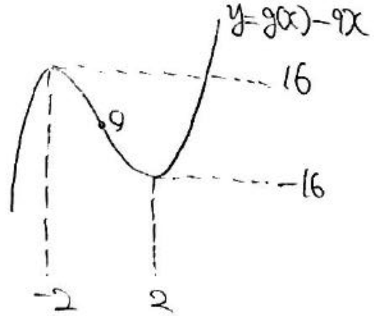


$x=\underline{-1}$ // で極大, $x=\underline{1}$ // で極小、

$g(x)-9x$ $\qquad \{g(x)-9x\}'$

$=x^3-12x$ $\qquad =3x^2-12$

$\qquad =3(x+2)(x-2)$



これは $g(x)$ を x 軸方向に $\underline{2倍}$ //

y 軸方向に $\underline{8倍}$ //

場合1

$g(x)-x$ $\qquad \{g(x)-x\}'$

$=x^3-4x$ $\qquad =3x^2-4$

$\qquad =3\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

このグラフは $g(x)$ を x 軸方向に $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 倍するので2倍目の交点は

$$\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha}\ //$$

場合2

傾きを m とすれば $\left(\frac{1}{2},g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ を通る直線は

$$y=m\left(x-\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=mx-\frac{m}{2}-\frac{11}{8}.$$

よって

$$g(x)-\left(mx-\frac{m}{2}-\frac{11}{8}\right)=x^3-(m+3)x+\frac{m}{2}+\frac{11}{8}$$

$$\left\{g(x)-\left(mx-\frac{m}{2}-\frac{11}{8}\right)\right\}'=3\left(x+\sqrt{\frac{m+3}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{m+3}{3}}\right)$$

より

$$\sqrt{\frac{m+3}{3}}\,\alpha=\frac{1}{2}$$

$\therefore \underline{m=\frac{3}{4}\alpha^{-2}-3}$ //

場合3

$y=x^3-x^2-x+1$

$y'=3x^2-2x-1$

$y''=6x-2$

変曲点のx座標が$\frac{1}{3}$なので

x軸方向に$-\frac{1}{3}$平行移動して

変曲点のx座標を0にしたい.

$y=(x+\frac{1}{3})^3-(x+\frac{1}{3})^2-(x+\frac{1}{3})+1$

$=\cdots$

$=x^3-\frac{4}{3}x+\frac{16}{27}$

$y'=3x^2-\frac{4}{3}=3(x+\frac{2}{3})(x-\frac{2}{3})$

以上よりこのグラフの2番目の

交点のx座標は$\frac{2}{3}\alpha$. しかし

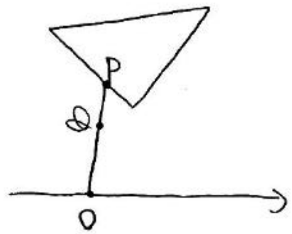
元の関数の変曲点のx座標は

$\frac{1}{3}$より 求める答えは

$\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3}$ //

3

(1)



(i) $t>0$のとき

Oを中心として$\triangle ABC$と相似の

位置にあり相似比が1:tである

$\triangle A'B'C'$.

(ii) $t<0$のとき

$\triangle A'B'C'$とOに関して対称な

三角形.

(iii) $t=0$のとき

QとOが一致.

(2) $y=x^2+1$をx軸, y軸方向

に$\pm t$倍すればよいので

$\frac{y}{\pm t}=\left(\frac{x}{\pm t}\right)^2+1$

$\therefore\ y=\pm\left(\frac{x^2}{t}+t\right)$ //

(3)

連立する

$(x-a)^2+b=sx$

$\Leftrightarrow x^2-(2a+s)x+a^2+b=0$

$D=(2a+s)^2-4(a^2+b)$

$=4as+s^2-4b$

(i) $4as+s^2-4b\geqq 0$ のとき

$x=\frac{2a+s\pm\sqrt{4as+s^2-4b}}{2}$

より交点は

$\left(\frac{2a+s\pm\sqrt{4as+s^2-4b}}{2},\ \frac{s(2a+s\pm\sqrt{4as+s^2-4b})}{2}\right)$ //

(ii) $4as+s^2-4b<0$のとき

交点なし

ちなみに

$y=\frac{1}{t}(x-ta)^2+tb$

$\Leftrightarrow \frac{y}{t}=\left(\frac{x}{t}-a\right)^2+b$

より先程のグラフをx, yともに

t倍したものなので

(i) $4as+s^2-4b\geqq 0$のとき

$\left(\frac{t(2a+s\pm\sqrt{4as+s^2-4b})}{2},\ \frac{st(2a+s\pm\sqrt{4as+s^2-4b})}{2}\right)$ //

(4)

$y=x^2+1$の(u, u^2+1)での

接線は

$y=2u(x-u)+u^2+1$

$=2ux-u^2+1$

これを$y=a(x-b)^2+c$と連立

$a(x-b)^2+c=2ux-u^2+1$

$\Leftrightarrow ax^2-2(u+ab)x+u^2+ab^2+c-1=0$

が重解である.

$\frac{D}{4}=(u+ab)^2$

$-a(u^2+ab^2+c-1)=0$

$\therefore\ (1-a)u^2+2abu+a(1-c)=0$

これでuがただ1つ実数解をもてばいい.

(i) $a=1$のとき

$2bu+1-c=0$

条件は $b\neq 0$

(ii) $a\neq 0$ かつ $a\neq 1$のとき

$\frac{D}{4}=\cdots=a\{ab^2-(1-a)(1-c)\}=0$

条件は

$ab^2=(1-a)(1-c)$