2014 横浜市立大

[I]

(1) 上から順に①, ②, ③ とすると

①−②

$(b-a)y+(a^2-b^2)z=a^4-b^4$

$\Leftrightarrow\ y-(a+b)z=-(a+b)(a^2+b^2)$ …④

①−③

$(c-a)y+(a^2-c^2)z=a^4-c^4$

$\Leftrightarrow\ y-(a+c)z=-(a+c)(a^2+c^2)$ …⑤

④−⑤

$(c-b)z=(a+c)(a^2+c^2)-(a+b)(a^2+b^2)$

$=ac^2+a^2c+c^3-ab^2-a^2b-b^3$

$=a(c^2-b^2)+a^2(c-b)+(c-b)(c^2+cb+b^2)$

$\therefore z=a(c+b)+a^2+c^2+cb+b^2$

$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$=A^2-B$

y

$=(a+b)(z-a^2-b^2)$

$=(a+b)(c^2+ab+bc+ca)$

$=(a+b)(c(a+c)+b(a+c))$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(A-c)(A-a)(A-b)$

$=(A^2-(a+c)A+ac)(A-b)$

$=A^3-\underbrace{(a+c+b)}_{A}A^2+BA-C$

$=BA-C$

x

$=a(BA-C)-a^2(A^2-B)+a^4$

$=a(\cancel{a^2b}+\cancel{ab^2}+b^2c+bc^2+\cancel{c^2a}+\cancel{ca^2}+2abc)$

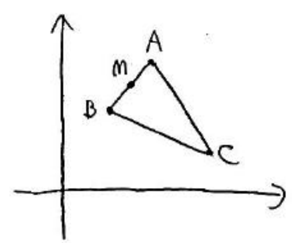
$-\cancel{a^2b^2}-\cancel{c^2a^2}-\cancel{a^3b}-a^2bc-\cancel{a^3c}$

$=ab^2c+abc^2+a^2bc$

$=(a+b+c)abc$

$=AC$

(2)



$M\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$

$C(3,\ 1)$

直線MC：$y=\frac{1-\frac{5}{2}}{3-\frac{3}{2}}(x-3)+1$

$=-x+4$

直線AB：$y=(x-1)+2$

$=x+1\ \Leftrightarrow\ x-y+1=0$

直線AC：$y=-2(x-3)+1$

$=-2x+7\Leftrightarrow 2x+y-7=0$

内心I$(t,\ -t+4)$とすると

AB, ACとの距離が等しいので

$\frac{|2t-3|}{\sqrt{2}}=\frac{|t-3|}{\sqrt{5}}$

$5(2t-3)^2=2(t-3)^2$

$20t^2-60t+45=2t^2-12t+18$

$18t^2-48t+27=0$

$6t^2-16t+9=0$

$t=\frac{8\pm\sqrt{10}}{6}$

x座標が1より大きいのが答え

$\underline{I\left(\frac{8+\sqrt{10}}{6},\ \frac{16-\sqrt{10}}{6}\right)}$ //

(3)

$S=A+A^2+\cdots+A^8$

$-)\ AS=\quad A^2+\cdots+A^8+A^9$

$(E-A)S=A-A^9$

ここで

$A^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$A^8=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-E$

$\therefore A^9=-A$

つまり

S

$=(E-A)^{-1}2A$

$=2\begin{pmatrix}1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & 1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{pmatrix}^{-1}A$

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=a$　$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}=b$ として

$$= 2\frac{1}{(1-a)^2+b^2}\begin{pmatrix}1-a & -b\\ b & 1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{1-2a+1}\begin{pmatrix}a-1 & -b\\ b & a-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1 & \frac{-b}{1-a}\\ \frac{b}{1-a} & -1\end{pmatrix}$$

$$\frac{b}{1-a}$$

$$= \frac{b(1+a)}{1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{4}{2-\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{\cancel{4}(2+\sqrt{2})}{2}\times\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2}}{\cancel{4}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2}{2}$$

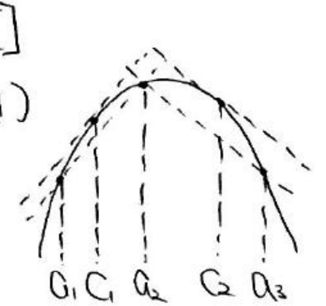
$$= 1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

$$\therefore S = \begin{pmatrix}-1 & -1-\sqrt{2}-\sqrt{4+2\sqrt{2}}\\ 1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}} & -1\end{pmatrix}$$

//

[II]

(1)



平均値の定理より

$$\begin{cases}\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}=f'(c_1)\\ a_1<c_1<a_2\end{cases}$$

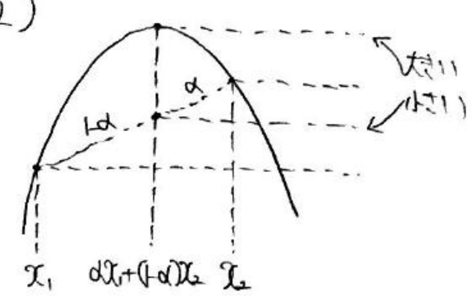
$$\begin{cases}\frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2}=f'(c_2)\\ a_2<c_2<a_3\end{cases}$$

をみたす実数 c_1, c_2 が存在する.
$f''(x)<0$ から $f'(x)$ は単調減少であり, $a_1<c_1<a_2<c_2<a_3$ より

$$f'(c_1)>f'(c_2)$$

$$\therefore \frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}>\frac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2}$$

(2)



$a_1=x_1,\ a_2=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,\ a_3=x_2$
として(1)より ($x_2>x_1$ と仮定して一般性を失わない)

$$\frac{f(a_2)-f(a_1)}{(\alpha-1)x_1+(1-\alpha)x_2}>\frac{f(a_2)-f(a_3)}{-\alpha x_1+\alpha x_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(a_2)-f(a_1)}{1-\alpha}>\frac{f(a_2)-f(a_3)}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha f(a_2)-\alpha f(x_1) > (1-\alpha)f(x_2)-(1-\alpha)f(a_2)$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

$x_1=x_2$ のときは

$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=f(x_1)$,
$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)=f(x_1)$
より与式の等号が成り立つ
よって D に属する任意の x_1, x_2 に対して
$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geqq \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$ が成立.

(3)
x_4 を D の実数とし
$0\leqq\beta\leqq1$ である β に対して(2)より

$$f(\beta x_4+(1-\beta)x_3) \geqq \beta f(x_4)+(1-\beta)f(x_3)$$

が成立.

ここで
$x_4=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$ とおくと

$$f(\beta\alpha x_1+\beta(1-\alpha)x_2+(1-\beta)x_3)$$
$$\geqq \beta f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)+(1-\beta)f(x_3)$$
$$\geqq \beta\alpha f(x_1)+\beta(1-\alpha)f(x_2)+(1-\beta)f(x_3)\quad (\because (2))$$

これより $\beta\alpha=\alpha_1,\ \beta(1-\alpha)=\alpha_2,\ (1-\beta)=\alpha_3$ とおけば

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta\alpha+\beta(1-\alpha)+1-\beta=1$$

を満たす $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に対して

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3) \geqq \alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\alpha_3f(x_3)$$

が成立.

(4) $f(x)=\log x$ は
$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ より(3)の式が使える. D の x_1, x_2, x_3 に対して(3)の式で $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\frac{1}{3}$ とすると

$$\log\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\geqq\frac{1}{3}(\log x_1+\log x_2+\log x_3)$$

$$\therefore \frac{x_1+x_2+x_3}{3}\geqq\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

[III] (1)

$F'(t)$

$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{t^2+\alpha} + t\cdot\frac{1}{2}(t^2+\alpha)^{-\frac{1}{2}}2t + \alpha\frac{1+t(t^2+\alpha)^{-\frac{1}{2}}}{t+\sqrt{t^2+\alpha}}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{t^2+\alpha} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+\alpha}} + \frac{\alpha}{\sqrt{t^2+\alpha}}\right\}$

$= \sqrt{t^2+\alpha}$

(2)

L

$= \int_0^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

ここで $y^2=4ax$ を微分

$2y\frac{dy}{dx} = 4a$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$

L

$= \int_0^{x_1}\sqrt{1+\frac{4a^2}{4ax}}\,dx$

$= \int_0^{x_1}\sqrt{1+\frac{a}{x}}\,dx \quad) x=t^2$

$= \int_0^{\sqrt{x_1}}\sqrt{1+\frac{a}{t^2}}\,2t\,dt$

$= 2\int_0^{\sqrt{x_1}}\sqrt{t^2+a}\,dt$

$= 2\left[\frac{1}{2}\left\{t\sqrt{t^2+a}+a\log\left(t+\sqrt{t^2+a}\right)\right\}\right]_0^{\sqrt{x_1}}$

$= \sqrt{x_1^2+ax_1}+a\log\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_1+a}\right)$

$\quad -a\log\sqrt{a}$

$= \sqrt{x_1^2+ax_1}+a\log\left(\sqrt{\frac{x_1}{a}}+\sqrt{\frac{x_1}{a}+1}\right)$

[IV]

(1) 1番、2番、3番と置いておくごとに置き方は1通り、2通り、3通り…考えられるのでn個のボールを置くのは $n!$ 通り. このうちi番目のボールが1番に並ぶのは残りの $(n-1)$ 個の並び方の総数より $(n-1)!$ 通り.

求める確率は

$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

(2)

1番をまずこの操作を繰り返し1番目に移動する. 次に2番を同じように繰り返し2番目に移動する. これをn番まで繰り返せば必ず番号順の列になる.

(3)

k回入れ替えた後の任意の2つのボールの大小が逆転している組を a_k とおくと

$a_{k+1} = a_k - 1.$

番号順になる回数をm回とすると

$a_m = 0.$

a_k の一般項は

$a_k = a_0 + k(-1)$

$= a_0 - k$

より $k=m$ とおくと

$a_0 - m = 0$

$\therefore m = a_0$

すなわち a_0 回の操作で番号順になるので選び方は無関係.

(4)

i番目のボールを入れ替える回数を X_i とすると

$P(X_i = l) = \frac{1}{i}$

X_i の期待値 E_i は

$E_i = \sum_{l=0}^{i-1} l\frac{1}{i}$

$= \frac{1}{2}(i-1)i\frac{1}{i}$

$= \frac{1}{2}(i-1)$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}E_i$

$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(i-1)$

$= \frac{1}{2}(0+1+\cdots+(n-1))$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$

$= \frac{1}{4}(n-1)n$