2013 昭和大医 I期

1

(1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-6\\3\\12\end{pmatrix}$

直線ABの媒介変数表示

$$\begin{cases}x=2-6t\\y=-3+3t\\z=12t\end{cases}$$

$H(2-6k,-3+3k,12k)$とおくと

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PH}=\begin{pmatrix}-6\\3\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6-6k\\3+3k\\-3+12k\end{pmatrix}$$

$$=-63+189k=0$$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

$\therefore \underline{H(0,-2,4)}$ //

(2)

(2-1)

$$\sin\theta=\sin 2\cdot\frac{\theta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$=\underline{\frac{2t}{1+t^2}}$$ //

(2-2)

同様に $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$(与式)=\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=-\frac{1}{5}$$

$\Leftrightarrow (-t^2+2t+1)5=-(1+t^2)$

$\Leftrightarrow 0=4t^2-10t-6$

$\Leftrightarrow 0=2t^2-5t-3$

$\Leftrightarrow 0=(2t+1)(t-3)$

$t=\tan\frac{\theta}{2}=\underline{-\frac{1}{2},3}$ //

(3)

(3-1) P(2回目がm)

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\underline{\frac{1}{n}}$$ //

(3-2)

P(得点がm)

$=P(m-1以下\to m)$

$$=\frac{m-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\underline{\frac{m-1}{n(n-1)}}$$ //

(3-3)

P(0点)

$$=\sum_{k=1}^{n}P(k\to k-1以下)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=\underline{\frac{1}{2}}$$ //

(3-4)

E(m)

$$=\sum_{m=2}^{n}m\cdot\frac{m-1}{n(n-1)}$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{m=1}^{n-1}m(m+1)$$

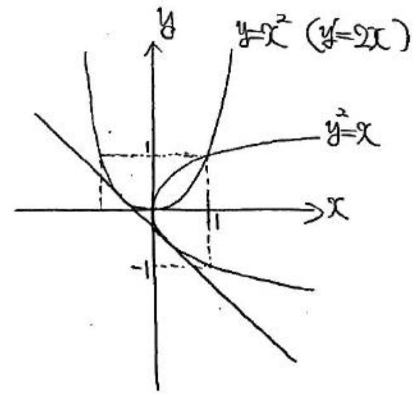
連続自然数積の和

$$=\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

$$=\underline{\frac{n+1}{3}}$$ //

2

(1)



C_1, C_2も$y=x$に関して対称なので図より共通接線の傾きは-1.

この傾きのときの$y=x^2$上の接点は$(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

答えは

$$y=-(x+\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{4}$$
$$=\underline{-x-\tfrac{1}{4}}$$ //

(2)

$C_2: x=y^2$ ($\frac{dx}{dy}=2y$)

の(t^2,t)における接線は

$$x=2t(y-t)+t^2$$
$$=2ty-t^2 \cdots ②$$

↓ $P(p,p^2)$通る

$$p=2tp^2-t^2$$

$\Leftrightarrow t^2-2p^2t+p=0 \cdots ①$

tが異なる2つの実数解をもてばいいので

$$\frac{D}{4}=p^4-p$$
$$=p(p-1)\underbrace{(p^2+p+1)}_{>0}>0$$

$\therefore \underline{p<0,\ 1<p}$ //

(3)

(2)から(1)のときの$p=-\frac{1}{2}$のときを除けばいいので

$$\underline{p<-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}<p<0,\ 1<p}$$ //

(4)

Q_1, Q_2 を通る直線

$$y=\frac{q_1^2-q_2^2}{q_1-q_2}(x-q_1)+q_1^2$$
$$=(q_1+q_2)x-q_1q_2.$$

$y^2=x$ と連立すると

$$0=(q_1+q_2)y^2-y-q_1q_2.$$

$y^2=x$ と接するには

$$D=(-1)^2-4(q_1+q_2)(-q_1q_2)$$
$$=1+4(q_1+q_2)q_1q_2=0$$

$$\therefore\ \underline{(q_1+q_2)q_1q_2=-\frac{1}{4}}\ /\!/$$

(5)

①で t の解を α, β とおくと

$$\alpha+\beta=2p^2,\quad \alpha\beta=p.$$

$t=\alpha, \beta$ での C_2 の接線は②より

$$x=2\alpha y-\alpha^2$$
$$x=2\beta y-\beta^2.$$

これらを $y=x^2$ と連立して

$$0=2\alpha x^2-x-\alpha^2 \cdots ③$$
$$0=2\beta x^2-x-\beta^2. \cdots ④$$

③の $x=p$ 以外の解を q_1,
④の $x=p$ 以外の解を q_2 とおくと

$$p+q_1=\frac{1}{2\alpha},\quad pq_1=-\frac{\alpha}{2}$$
$$p+q_2=\frac{1}{2\beta},\quad pq_2=-\frac{\beta}{2}.$$

これより

$$q_1+q_2=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}-2p$$
$$q_1q_2=\frac{\alpha\beta}{4p^2}\quad (\because p\neq 0)$$

なので

$$(q_1+q_2)q_1q_2$$
$$=\left(\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}-2p\right)\frac{p}{4p^2}$$
$$=(p-2p)\frac{1}{4p}$$
$$=-\frac{1}{4}$$

より (4)の条件をみたす.

$\boxed{3}$

(1)

(1-1)

焦点 $(\pm\sqrt{16+9}, 0)$

$$=\underline{(\pm 5, 0)}\ /\!/$$

(1-2)

H を x^2 で割る.

$$\frac{1}{16}-\frac{y^2}{9x^2}=\frac{1}{x^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2}=\frac{9}{16}-\frac{9}{x^2}$$
$$\downarrow x=\pm\infty$$
$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{y}{x}=\pm\frac{3}{4}$$

傾きが正の漸近線 $\underline{y=\frac{3}{4}x}\ /\!/$

(1-3) H の (s, t) 上の接線は

$$\frac{sx}{16}-\frac{ty}{9}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{s}{16}x-1=\frac{t}{9}y$$
$$\Leftrightarrow \frac{9s}{16t}x-\frac{9}{t}=y$$

これが $y=\frac{3}{4}x$ と直交するので

$$\frac{9s}{16t}=-\frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow s=-\frac{64}{27}t \cdots ①$$

また

$$\frac{s^2}{16}-\frac{t^2}{9}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}\cdot\frac{64^2}{27^2}t^2-\frac{1}{9}t^2=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{256}{27^2}t^2-\frac{81}{27^2}t^2=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{175}{27^2}t^2=1$$
$$\Leftrightarrow \quad t=\pm\frac{27}{5\sqrt{7}}=\pm\frac{27\sqrt{7}}{35}$$

①より

接点 $\left(\frac{64\sqrt{7}}{35}, -\frac{27\sqrt{7}}{35}\right)$

$\left(-\frac{64\sqrt{7}}{35}, \frac{27\sqrt{7}}{35}\right)$

---

(2)

$$\log_a b>\frac{4}{\log_a b}+3$$

真数・底条件から $a\geq 2,\ b\geq 2 \to \log_a b>$

$$(\log_a b)^2-3\log_a b-4>0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{(\log_a b+1)}_{>0}(\log_a b-4)>0$$
$$\therefore\ \log_a b>4$$
$$\therefore\ b>a^4$$

条件より

$$9a>b>a^4$$

$\therefore\ 9 > a^3$

これをみたすのは $a=2$ のみ.

$18 > b > 16$

$\therefore\ b = 17$

(3) $l: y = x+2$, $m: y = -x+3$

l 上の点 $(s, s+2)$ を A で移すと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ s+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)s+2b \\ (c+d)s+2d \end{pmatrix}$$

これが m 上にあるから

$(a+b+c+d)s + 2(b+d) - 3 = 0$ …①

m 上の点 $(t, -t+3)$ を A で移すと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -t+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b)t+3b \\ (c-d)t+3d \end{pmatrix}$$

これが l 上にあるから

$(a-b-c+d)t + 3(b-d) + 2 = 0$ …②

①,②は s, t に関わらず成立するので

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 2(b+d)-3=0 \\ a-b-c+d=0 \\ 3(b-d)+2=0 \end{cases}$$

解くと

$b = \frac{5}{12},\ d = \frac{13}{12},\ a = -\frac{13}{12},\ c = -\frac{5}{12}$

$\therefore\ A = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$

HCの定理

$A^2 - E = O\quad \therefore\ A^2 = E$

$\therefore\ A^{2013} = A = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$

4

(1)

$y' = (1-x^2)e^{x^2} - 2x^2e^{x^2} + 2x^2(1-x^2)e^{x^2}$

$= (-2x^4 - x^2 + 1)e^{x^2}$

$= -(2x^2-1)(x^2+1)e^{x^2}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

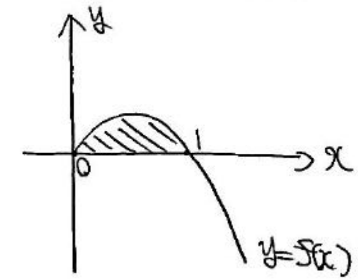
$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき極小値 $-\frac{\sqrt{2e}}{4}$

(2)

$f(x) = x(1-x^2)e^{x^2}$ とおくと

$f(-x) = -f(x)$ より $f(x)$ は

奇関数. $x \geqq 0$ のグラフは



図の斜線部分の2倍が答え.

求める面積は

$2\int_0^1 x(1-x^2)e^{x^2}dx$ $\quad x^2=t$, $2xdx=dt$, $\begin{array}{c|c} x & 0\to1 \\ \hline t & 0\to1 \end{array}$

$= \int_0^1 (1-t)e^t dt$

$= \left[(1-t)e^t + e^t\right]_0^1$ $\quad \boxed{(1-t)e^t - e^t}\ \boxed{+e^t}$

$= e-2$