2013順天堂医

$\boxed{1}$

(1) $a_n = a_1 r_a^{n-1}$

$b_n = a_1 r_b^{n-1}$ とする.

無限級数 $\frac{a_1}{1-r_a} = 6,\ \frac{a_1}{1-r_b} = 4$

$\therefore 6 - 6r_a = 4 - 4r_b$

$\therefore \quad r_b = \frac{3}{2} r_a - \frac{1}{2}$

また

無限級数 $\frac{1}{1-\frac{r_b}{r_a}} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{r_a}{r_a - r_b} = 3$

$\Leftrightarrow r_a = 3\left(r_a - \frac{3}{2} r_a + \frac{1}{2}\right)$

解くと

$\underline{a_1 = b_1 = \frac{12}{5},\ r_a = \frac{3}{5},\ r_b = \frac{2}{5}}$ //

(2) $y = \frac{1}{2+y}$ となる.

$\Leftrightarrow 1 \cdot y^2 + 2y - 1 = 0$

$\therefore \underline{y = -1 + \sqrt{2}}$ //

$x = \frac{2}{1 + (-1+\sqrt{2})} = \underline{\sqrt{2}}$ //

(3)

$(\log_3 2)x^2 - (\log_3 2 + \log_3 3)x + 2\log_3 3 - 2\log_3 2 = 0$

x

$= \frac{\log_3 2 + \log_3 3 \pm \sqrt{(\log_3 2 + \log_3 3)^2 - 4\log_3 2(2\log_3 3 - 2\log_3 2)}}{2\log_3 2}$

$= \frac{\log_3 2 + \log_3 3 \pm \sqrt{9(\log_3 2)^2 - 6(\log_3 2)(\log_3 3) + (\log_3 3)^2}}{}$

$\vdots$

$= \frac{\log_3 2 + \log_3 3 \pm (3\log_3 2 - \log_3 3)}{}$

$\vdots$

$= 2,\ \frac{2\log_3 3 - 2\log_3 2}{2\log_3 2}$

$= 2,\ \frac{\log_3 \frac{3}{2}}{\log_3 2}$) 底の変換

$= \underbrace{2}_{\alpha},\ \underbrace{\log_2 \frac{3}{2}}_{\beta}$

$\therefore \underline{2^\alpha = 4},\ \underline{2^\beta = \frac{3}{2}}$ //

(4) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

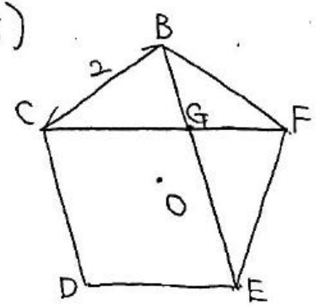
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p \\ c+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+p \\ d+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+p \\ c+d+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

より $\underline{p = q = 2}$ // $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ //

(5)



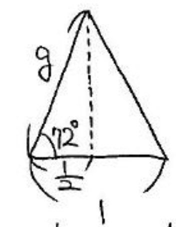
黄金数を $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする.

鋭角黄金三角形の辺の比を使えば

$BE = 2g = \underline{1+\sqrt{5}}$ //

$BG = \frac{2}{g} = \frac{4}{1+\sqrt{5}} = \underline{-1+\sqrt{5}}$ //

鈍角黄金三角形であると



$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\frac{1}{2}}{g} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \underline{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$ //

$\triangle BOC$ に余

$4 = 2OB^2 - 2OB^2 \cos\frac{2\pi}{5}$

$= \frac{5-\sqrt{5}}{2} OB^2$

$\therefore OB^2 = \frac{8}{5-\sqrt{5}} = \underline{\frac{2\sqrt{5}+10}{5}}$ //

三平方

$OA^2 = 2^2 - OB^2 = \frac{-2\sqrt{5}+10}{5}$

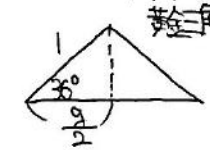
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})$

$= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} - \underbrace{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}}_{0} - \underbrace{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}}_{0} + OA^2$

$= OB^2 \underbrace{\cos 144^\circ}_{-\cos 36^\circ} + OA^2$

鋭角黄金三角形



$= \frac{2\sqrt{5}+10}{5}\left(-\frac{g}{2}\right) + \frac{-2\sqrt{5}+10}{5}$

$= \frac{\sqrt{5}+5}{5} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \frac{-4\sqrt{5}+20}{10}$

$= \underline{1-\sqrt{5}}$ //

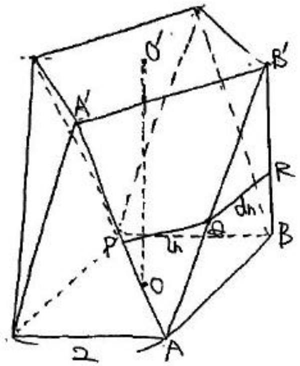
別

$\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ に気がつけば

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$

を計算するのが速い.

$\boxed{2}$



O_0からl_0の距離 $\sqrt{2}$

O_3からl_3 〃 1

より $a=\underline{\sqrt{2}-1}$ だけ減少.

(O_hからl_hの距離)

$=\sqrt{2}-a\cdot\frac{h}{3}$

hに対する増加率は微分すれば

$-\frac{a}{3}=\underline{\frac{-1}{3}a}$.

また

$l_h=0+2\cdot\frac{h}{3}=\underline{\frac{2}{3}h}$

$\triangle B'AB$とS_hの交線をd_hとおく

(O_hからd_hまでの距離)

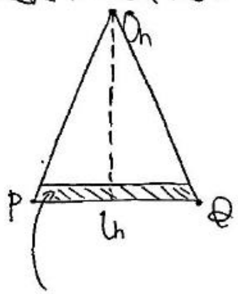
$=1+(\sqrt{2}-1)\frac{h}{3}=1+\frac{a}{3}h$

増加率は $\underline{\frac{1}{3}a}$

$d_h=2-2\frac{h}{3}$

$=\underline{\frac{-2}{3}h+2}$

$S(h)$を求めるためにまずΔSを求める.

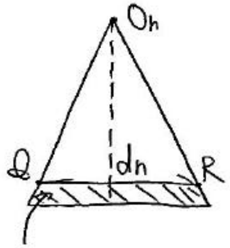


(ここの面積の増分)

$\fallingdotseq l_h\times$(O_hからl_hの距離の増分)

$=\frac{2h}{3}\times\left(-\frac{a}{3}\Delta h\right)$

$=-\frac{2ah}{9}\Delta h$



(ここの面積の増分)

$\fallingdotseq d_h\times\frac{1}{3}a\Delta h$

$=\left(-\frac{2}{9}h+\frac{2}{3}\right)a\Delta h$

以上より$S(h)$の増分ΔSは

$\Delta S=4\left(-\frac{2h}{9}a\Delta h\right)+4\left(-\frac{2}{9}h+\frac{2}{3}\right)a\Delta h$

$=\underline{\left(\frac{-16}{9}h+\frac{8}{3}\right)a\Delta h}$

よって

$S'(h)=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta h}$

$=\left(-\frac{16}{9}h+\frac{8}{3}\right)a$

$S(h)=\left(-\frac{8}{9}h^2+\frac{8}{3}h\right)a+C$

$\downarrow$ $S(0)=4$より $C=4$

$\therefore S(h)=\underline{\left(\frac{-8}{9}h^2+\frac{8}{3}h\right)a+4}$

V

$=\int_0^3 S(h)dh$

$=\left[\left(-\frac{8}{27}h^3+\frac{4}{3}h^2\right)a+4h\right]_0^3$

$=-8a+12a+12$

$=4\underbrace{a}_{\sqrt{2}-1}+12$

$=\underline{4\sqrt{2}+8}$

3

(1)

$y=ax+b$ と $y=cx+d$ が直交

$\Leftrightarrow$ $y=ax$ と $y=cx$ が直交

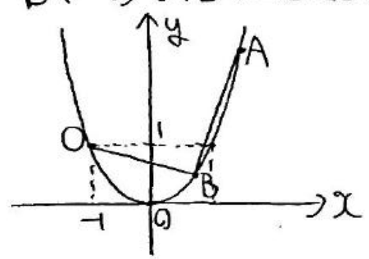
$\Leftrightarrow$ $y=ax$ 上の点 $A(1, a)$
$y=cx$ 上の点 $C(1, c)$
をとると $\angle AOC=90^\circ$

$\Leftrightarrow$ $OA^2+OC^2=AC^2$

$\Leftrightarrow$ $1+a^2+1+c^2=(a-c)^2$

$\Leftrightarrow$ $ac=-1$

(2) $b\neq -1,\ a\neq b$ のときを考えればよい.



$$\frac{b^2-1}{b-(-1)}\times\frac{a^2-b^2}{a-b}=-1$$

$\Leftrightarrow$ $(b-1)(a+b)=-1$
$(b\neq -1,\ a\neq b)$

$\Leftrightarrow$ $b^2+(a-1)b+1-a=0$ …① $(b\neq -1,\ a\neq b)$

①に $b=a$ を代入すると

$2a^2-2a+1=0$

$\Leftrightarrow$ $2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=0$

となり, ①は $b=a$ を解にもたない.

求める条件は①において, b が -1 でない実数解を少なくとも1つもつこと.

つまり

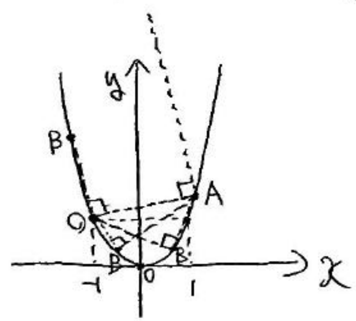
$D>0$ または $\left(D=0 \text{ かつ } -\frac{a-1}{2}\neq -1\right)$

$\Leftrightarrow$ $(a-1)(a+3)>0$
または $\{(a-1)(a+3)=0$ かつ $a\neq 3\}$

$\Leftrightarrow$ $a<-3,\ 1<a$ または $a=-3,\ 1$

$\therefore$ $a\leqq -3$ または $1\leqq a$

(3)



$\angle OAB,\ \angle AOB$ が直角になる条件は同様に

$$\begin{cases}(a-1)(a+b)=-1 & (a\neq -1,\ a\neq b)\\ (a-1)(b-1)=-1 & (a\neq -1,\ b\neq -1)\end{cases}$$

この式をみたす実数 b は1つずつしかないので直角三角形が4つできるためには①をみたす $b=-1$ 以外の異なる2つの実数 b が存在することである. つまり

$D>0$ かつ $(-1)^2+(a-1)(-1)+1-a\neq 0$

$\Leftrightarrow$ $(a<-3,\ 1<a)$ かつ $a\neq\frac{3}{2}$

$\therefore$ $a<-3$ または $1<a<\frac{3}{2}$
または $\frac{3}{2}<a$